



EFOP-3.4.4 – 16-2017-0025

**Bepillantás a jövődbe! –
Komplex műegyetemi pályaaorientációs és továbbtanulást segítő programok**

MATEMATIKA PÉLDATÁR

Dr. Csima Géza

BME TTK Matematika Intézet Geometria Tanszék

Budapest, 2020

SZÉCHENYI 



Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE



I. RÉSZ

FELADATOK 9-10. OSZTÁLYOSOK RÉSZÉRE

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Halmazelmélet

1. Melyik az a legszűkebb halmaz, amelyekbe az adott szám, vagy kifejezés tartozik ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, egyik sem)?

- | | | |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|
| (a) π | (e) $\sqrt{-9}$ | (i) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ |
| (b) $3, 14$ | (f) $8, 89$ | (j) $\frac{4,12}{8}$ |
| (c) -7 | (g) $\frac{25}{42}$ | (k) $\frac{5}{4-\sqrt{16}}$ |
| (d) $\sqrt{3}$ | (h) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ | (l) $\frac{125}{5}$ |

2. Igaz, vagy hamis a következő állítás?

- (a) Minden egész szám valós.
- (b) Van olyan nemnegatív szám, ami racionális.
- (c) Van olyan egész szám, ami nem racionális.
- (d) Minden valós szám felírható két egész szám hányadosaként.
- (e) Van olyan racionális szám, ami valós.
- (f) Ha egy szám felírható két egész szám hányadosaként, akkor az egész szám.
- (g) Ha egy szám egész, akkor pozitív.
- (h) Ha egy szám racionális, akkor valós
- (i) Ha egy szám egész, akkor az ellentetje is egész.

3. Adjuk meg azon halmazt, melynek egy valós szám pontosan akkor eleme, ha:

- (a) 3-nál nagyobb, de 5-nél kisebb
- (b) 2-nél nem kisebb, de 7-nél kisebb
- (c) 0-nál nagyobb, de 1-nél nem nagyobb
- (d) -3-nál nem kisebb, de 5-nél nem nagyobb
- (e) 3-nál kisebb
- (f) 8-nál nem nagyobb
- (g) 2-nél nagyobb
- (h) -13-nál nem kisebb
- (i) 2-nél kisebb, vagy 7-nél nagyobb
- (j) -3-nál nem nagyobb, vagy 4-nél nagyobb

- (k) 8-nál kisebb, vagy 12-nél nem kisebb
- (l) 0-nál nem nagyobb, vagy 9-nél nem kisebb

4. Igaz-e, hogy az alábbi halmaz véges?

- (a) -2 és 8 közötti egészek
- (b) 3 és 4 közötti racionálisak
- (c) 8-nál nem nagyobb természetes számok
- (d) 3-nál nem kisebb egészek
- (e) azon valósak, melyek négyzete megegyezik az 8-szorosukkal
- (f) azon valósak, melyek négyzetével vett összegükhöz 4-et adva, 0-t kapunk
- (g) azon racionálisak, melyek 3-szorosa nem nagyobb, mint 2 és 2-szeresük nem kisebb, mint 3
- (h) azon egész számokból álló rendezett számpárok, melyek négyzetösszege nem nagyobb, mint 4
- (i) azon egész számokból álló rendezett számpárok, melyekre az első szám négyzete nem nagyobb a második számnál

Függvénytan

5. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Hol metszik az alábbi függvények az x és y tengelyeket (9-10)?

- | | | |
|-------------|--------------|-------------------------|
| (a) $x + 1$ | (c) $x - 5$ | (e) $\frac{2}{5}x$ |
| (b) $-2x$ | (d) $4x - 4$ | (f) $-\frac{3}{4}x + 2$ |

6. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mely pontokban nincsenek értelmezve az alábbi függvények (9-10)?

- | | | |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|
| (a) $\frac{1}{x}$ | (c) $\frac{1}{x+5} + 2$ | (e) $-\frac{1}{x-2} + 2$ |
| (b) $\frac{1}{x-3}$ | (d) $-\frac{3}{x}$ | |

7. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek (9-10)?

- (a) $|x| + 2$ (c) $2|x - 1|$ (e) $-\frac{1}{2}|x + 2| + 1$
 (b) $|x - 3|$ (d) $-2|x + 3|$

8. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mi az értelmezési tartománya az alábbi függvényeknek (9-10)?

- (a) $\sqrt{x + 2}$ (c) $2\sqrt{x + 3}$
 (b) $\sqrt{x - 1} + 2$ (d) $-3\sqrt{x - 2} - 1$

9. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Milyen tartományon szigorúan monoton növekszenek az alábbi függvények (9-10)?

- (a) $(x - 2)^2$ (c) $2(x - 1)^2 + 2$
 (b) $x^2 + 3$ (d) $-(x + 3)^2 - 3$

10. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = 3x$ függvényből úgy kapunk, hogy:

- (a) y tengely mentén toljuk felfelé 3 egységet
 (b) x tengely mentén toljuk jobbra 5 egységet
 (c) tükrözzük az x tengelyre
 (d) alkalmazunk egy $\frac{1}{3}$ arányú merőleges affinitást az x tengelyre nézve
 (e) alkalmazunk egy $-\frac{1}{3}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre nézve

11. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = x^2$ függvényből úgy kapunk, hogy:

- (a) y tengely mentén toljuk lefelé 4 egységet
 (b) x tengely mentén toljuk balra 1 egységet
 (c) tükrözzük az x tengelyre
 (d) y tengely mentén felfelé 2 egységet és az x tengely mentén toljuk jobbra 3 egységet
 (e) x tengely mentén toljuk balra 3 egységet és az y tengely mentén toljuk lefelé 5 egységet
 (f) x tengely mentén toljuk jobbra 1 egységet, tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk felfelé 4 egységet

12. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényből úgy kapunk, hogy:
- (a) y tengely mentén toljuk lefelé 2 egységet
 - (b) x tengely mentén toljuk jobbra 3 egységet
 - (c) x tengely mentén toljuk balra 2 egységet és az y tengely mentén toljuk felfelé 1 egységet
 - (d) tükrözzük az y tengelyre
 - (e) tükrözzük az y tengelyre és az x tengely mentén toljuk jobbra 4 egységet
 - (f) x tengely mentén toljuk jobbra 1 egységet, tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk lefelé 2 egységet
13. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = |x|$ függvényből úgy kapunk, hogy:
- (a) x tengely mentén toljuk balra 2 egységet
 - (b) y tengely mentén toljuk felfelé 4 egységet
 - (c) x tengely mentén toljuk jobbra 1 egységet és az y tengely mentén toljuk lefelé 2 egységet
 - (d) tükrözzük az x tengelyre
 - (e) tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk lefelé 3 egységet
 - (f) x tengely mentén toljuk balra 3 egységet, tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk lefelé 2 egységet
14. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényből úgy kapunk, hogy:
- (a) x tengely mentén toljuk balra 1 egységet
 - (b) y tengely mentén toljuk felfelé 1 egységet
 - (c) x tengely mentén toljuk jobbra 2 egységet és az y tengely mentén toljuk felfelé 3 egységet
 - (d) tükrözzük az x tengelyre
 - (e) tükrözzük az y tengelyre
 - (f) tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk felfelé 2 egységet
 - (g) tükrözzük az x tengelyre és az x tengely mentén toljuk jobbra 3 egységet

- (h) tükrözzük az y tengelyre, x tengely mentén toljuk jobbra 1 egységet és az y tengely mentén toljuk lefelé 4 egységet

15. Döntsük el az alábbi pontról, hogy a megadott függvény grafikonja alatt, fölött, vagy rajta helyezkedik el:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) $f(x) = 2x + 3, P(1, 5)$ | (i) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, P(3, 3)$ |
| (b) $f(x) = 2 - 3x, P(3, -5)$ | (j) $f(x) = 2\sqrt{x-3} + 4, P(4, 6)$ |
| (c) $f(x) = 3x + 4, P(-1, 0)$ | (k) $f(x) = -\sqrt{x+2} + 1, P(7, -1)$ |
| (d) $f(x) = x - 3 + 4, P(1, 6)$ | (l) $f(x) = 4\sqrt{x-3} - 2, P(12, 9)$ |
| (e) $f(x) = 2 x - 2 - 1, P(0, 2)$ | (m) $f(x) = \frac{3}{x-4} + 2, P(5, 3)$ |
| (f) $f(x) = -3 x + 4 + 3, P(-2, 0)$ | (n) $f(x) = \frac{-2}{x+1} - 3, P(5, -4)$ |
| (g) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5, P(2, 5)$ | (o) $f(x) = \frac{5}{x-2} - 1, P(7, 1)$ |
| (h) $f(x) = -x^2 - 6x - 4, P(-2, 3)$ | |

16. Egy szabadba kitett mérőhengerben kezdetben 10mm víz volt. 10 órakor elkezdett esni az eső 8mm/óra állandó intenzitással. Írjuk fel a hengerben lévő víz mennyiségét az idő függvényében. Hány mm víz volt a hengerben 14 órakor, amikor az eső elállt.
17. Egy medencében 12m^3 víz volt. A leeresztő csap megnyitásakor 10 liter víz távozik percenként. Írjuk fel a medencében lévő víz mennyiségét az idő függvényében. Mennyi idő alatt ürül ki a medence?
18. Egy vállalkozó havi fix költsége 360000Ft. A kész termékét dobozonként 6000Ft haszonnal tudja értékesíteni. Írjuk fel a profitot az eladott dobozok függvényében. Mekkora a nyereség, ha egy adott hónapban 75 dobozt tud eladni?
19. Egy gyorsulási versenyen az autók gyorsulása állandó és így a megtett utat az $\frac{a}{2}t^2$ függvény írja le, ahol a a gyorsulás mértéke, t pedig az eltelt idő.
- (a) Az A autó pontosan 10 másodperc alatt ér el az 500 méteres pálya végére. Milyen gyorsulása van az A autónak?
- (b) A B autó pontosan 5 másodperc alatt gyorsul fel 108 km/h-ra, azaz 30 m/s-ra. Hol tart a B autó 10 másodperccel a start után?
20. Budapest és Szolnok között a távolság pontosan 100 km. Írjuk fel az utazáshoz szükséges időt, ha a távolságot állandó v sebességgel tesszük meg.

21. Egy nagy földterületet egyetlen traktor 80 óra alatt szánt fel. Írjuk fel a szántáshoz szükséges időt a traktorok számának függvényeként. Mennyi időre van szükség, ha 8 traktorunk van, de a kezelők közben tartanak egy 1 órás ebédszünetet?
22. Kedvenc kutyusunkat, Mazsolát leültetjük a számegyenesre a $+3$ -hoz. Írjuk fel a saját helyzetünk függvényében, mennyit kell neki szaladnia, ha magunkhoz hívjuk (Mazsola a szuperhallása miatt bármilyen messziről meghall minket).
23. Adott egy négyzet alakú mező. Írjuk fel a bekerítéséhez szükséges drót hosszát a terület függvényében, ha az egyik oldalon egy patak miatt nem kell kerítés.
24. Ha egy mezőn egy kecskét egy pányvával egy póznához kötünk, a kecske mindent leleget, amit csak elér. Írjuk fel a lelegetett terület nagyságát a pányva hosszának függvényében. Hányszorosa legyen a pányva hossza a mostaninak, ha kétszer akkora területet szeretnénk vele "lenyíratni"?

Geometria

25. Egy ABC derékszögű háromszögben (a derékszög a C csúcsnál van):

- | | |
|--|---|
| (a) $a = 3, b = 4, c = ?$ | (f) $a = 5, m_c = 4, b = ?$ |
| (b) $a = 5, c = 13, b = ?$ | (g) $T = 10, c = 5, m_c = ?$ |
| (c) $a = 6, \beta = 60^\circ, c = ?$ | (h) $\alpha = 30^\circ, m_c = 2, c = ?$ |
| (d) $b = 3, \beta = 30^\circ, c = ?$ | (i) $T = 30, a = 5, c = ?$ |
| (e) $c = 10, \alpha = 45^\circ, a = ?$ | (j) $\alpha = 45^\circ, m_c = 3, T = ?$ |

26. Adjuk meg a trigonometrikus kifejezés számértékét, ha az létezik:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (a) $\sin 30^\circ$ | (e) $\cos 30^\circ$ | (i) $\tan 30^\circ$ | (m) $\cot 30^\circ$ |
| (b) $\sin 45^\circ$ | (f) $\cos 45^\circ$ | (j) $\tan 45^\circ$ | (n) $\cot 45^\circ$ |
| (c) $\sin 60^\circ$ | (g) $\cos 60^\circ$ | (k) $\tan 60^\circ$ | (o) $\cot 60^\circ$ |
| (d) $\sin 90^\circ$ | (h) $\cos 90^\circ$ | (l) $\tan 90^\circ$ | (p) $\cot 90^\circ$ |

27. Adjuk meg radiánban az alábbi szögeket

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) 180° | (d) 30° |
| (b) 90° | (e) 270° |
| (c) 60° | (f) 15° |

28. Igazak-e az alábbi állítások. Ha igen, miért, ha nem, javítsuk ki:
- (a) A tengelyes tükrözés megőrzi a körüljárás irányát.
 - (b) Az eltolásnak nincsen fixpontja.
 - (c) A középpontos tükrözés tekinthető egy fix pont körüli 90° -os forgatásnak.
 - (d) A tengelyes tükrözésnek pontosan egy fixpontja van.
 - (e) Ha egy pontot egy tőle különböző másik pont körül 120° -al elforgatunk kétszer, akkor az elforgatott képek és az eredeti pont egy szabályos háromszöget határoz meg.
 - (f) Egy egyenesnek és a tengelyesen tükrözött képének pontosan egy közös pontja van.
29. Adott pont körül hányszor és hány fokkal kell elforgatni egy pontot, hogy szabályos ötszöget kapjunk?
30. Lássuk be, hogy a szabályos ötszög minden átlója párhuzamos az ötszög egyik oldalával.
31. Hány oldala van egy olyan szabályos sokszögnek, melynek minden belső szöge 150° ?
32. Mennyi a szabályos 24-szög egyik belső szöge?
33. Mennyi a szabályos 180-szög belső szögeinek összege?
34. Mennyi a szabályos 360-szög külső szögeinek összege?
35. Hány szimmetriatengelye van egy szabályos $2n$ szögnek ($n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$)?
36. Hány szimmetriatengelye van egy szabályos $2n - 1$ szögnek ($n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$)?
37. Adott egy 6 egység sugarú kör. Mekkora a keletkező körív kerülete és területe, ha a középponti szög:
- | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|
| (a) 15° | (d) 60° | (g) 180° |
| (b) 30° | (e) 90° | (h) 270° |
| (c) 45° | (f) 120° | |
38. Egy 5cm sugarú kör egyik szelője 4cm távolságra van a kör középpontjától. Mekkora a keletkező húr hossza? Mekkora a keletkező körívk területa? Mekkora a húrhoz tartozó középponti szög?

39. Mekkora annak a körnek a sugara, melynek a középponttól 12cm távolságra lévő szelője a kör egy 10cm-es húrját határozza meg?
40. Milyen hosszúak azok az érintő szakaszok, melyeket egy 8cm sugarú körhöz húzunk egy, a kör középpontjától 10cm távolságra lévő pontból?
41. Hány fokos szöget zár be a kis-és nagymutatója egy analóg órának, ha az idő éppen:
- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| (a) 16:00 | (c) 12:30 | (e) 7:40 |
| (b) 17:15 | (d) 3:25 | (f) 23:54 |
42. Egy kör egy húrja és a húr egyik végpontjához húzott érintő 30° -os szöget zárnak be egymással. Mekkora a húrhoz tartozó középponti szög?
43. Mekkora egy 10cm átfogójú derékszögű háromszög köré írt körének sugara?
44. Egy adott kör egy húrjához tartozó középponti szöge 40° . Tekintsük a húr felező merőlegesének körrel vett metszéspontjait. Mekkora a húrhoz ezen pontokban húzott szakaszok szöge?
45. Lehet-e egy körív két különböző pontjából ugyanazon húrhoz húzott szakaszok szöge egyenlő?
46. Egybevágó-e két háromszög, ha megegyezik:
- két oldal és egy szög
 - egy oldal és két szög
 - három szög
 - egy oldal, egy rajta fekvő szög és abból kiinduló magasság
47. Meghatározott-e a térben egy egyenes, ha adott:
- egy pontja és egy vele párhuzamos egyenes
 - egy pontja és egy rá merőleges egyenes
 - egy pontja és két rá merőleges egyenes, melyek egymással nem párhuzamosak
 - két olyan pont, melyektől egyenlő távol van
 - adott három nem egy egyenesre eső pont, melyektől egyenlő távol van
48. Meghatározott-e a térben egy sík, ha adott:
- két pontja

- (b) három nem egy egyenesre eső pontja
- (c) egy pontja és egy rá merőleges egyenes
- (d) két rá merőleges egyenes
- (e) egy rá illeszkedő és egy rá merőleges egyenes
- (f) két különböző egyenes

49. Pontot, egyenest, vagy síkot határozni meg egyértelműen (több megoldás is lehet):

- (a) két metsző egyenes
- (b) egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont
- (c) három nem egy egyenesre illeszkedő pont
- (d) egy sík és egy vele nem párhuzamos egyenes
- (e) két egymással nem párhuzamos sík
- (f) három páronként nem párhuzamos sík

Vektorok

50. Milyen vektor egyezik meg az ellentettjével?

51. Legyen egy paralelogramma 4 egymást követő csúcsa A , B , C és D . Fejezzük ki $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az alábbi vektorokat:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) $\overrightarrow{AC}$ | (c) $\overrightarrow{BC}$ |
| (b) $\overrightarrow{BD}$ | (d) $\overrightarrow{DB}$ |

52. Legyen egy szabályos ötszög csúcsai sorrendben A , B , C , D és E . Fejezzük ki $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorok segítségével az alábbi vektorokat:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) $\overrightarrow{DC}$ | (d) $\overrightarrow{CB}$ |
| (b) $\overrightarrow{DB}$ | (e) $\overrightarrow{CE}$ |
| (c) $\overrightarrow{BE}$ | |

53. Legyen S egy háromszög súlypontja, melynek csúcsai A , B és C . Mi lesz az $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ vektor?

54. Legyenek egy háromszög csúcsai A , B és C . Állítsuk elő azon vektorokat, melyek A pontból az oldalfelezési pontokba mutatnak.

55. Legyenek egy háromszög csúcsai A , B és C . Lássuk be, hogy $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ a A pontból a BC oldal B -hez közelebbi harmadoló pontjába, míg $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ a C -hez közelebbi harmadoló pontjába mutó vektor.
56. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egy közös csúcsból kiinduló, nem párhuzamos, nem nullvektorok. Adjuk meg x és y értékét, ha:
- (a) $3\underline{a} + 2\underline{b} = (x + 1)\underline{a} + (y - 4)\underline{b}$
- (b) $(x + y)\underline{a} + (y - x + 2)\underline{b} = 0$
57. Legyen $\underline{a}^*$ az $\underline{a}$ vektor $+60^\circ$ -al elforgatott képe. Fejezzük ki az $\underline{a}^{**}$ és $\underline{a}^{***}$ vektorokat az $\underline{a}$ és az $\underline{a}^*$ vektorok segítségével. Milyen alakzatot határoznak meg az elforgatás utáni képek?
58. Van-e olyan vektor, aminek nem teljes szögű elforgatottja megegyezik az eredeti vektorral?
59. Egy nem nullvektort tengelyesen tükrözzünk az e egyenesre, az eredmény megegyezik az eredeti vektorral. Hogyan helyezkedik el az e egyenes?
60. Egy nem nullvektort középpontosan tükrözzünk az O pontra, az eredmény az ellentett vektor. Hogyan helyezkedik el az O pont?

Algebra

Algebrai kifejezések

61. Állapítsuk meg az alábbi algebrai kifejezés fokszámát:

(a) $4x^3y^2$

(c) $x^3y^4z^2$

(b) $-2xy^6$

(d) $7x^2y^6z$

62. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét, ha

(a) $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = 4$: $-2y, 3x^2, 4xyz, y^2xz$

(b) $x = 3, y = \frac{1}{4}, z = 2$: $3y, -2x^2, 6xyz, -2y^2xz$

63. Vonjuk össze az alábbi egynemű algebrai kifejezéseket:

(a) $2ab + b^2 - 3ab + 4ab + 3b^2$

(b) $4ab - 2b^2 + ab + 3ab + 3b^2$

- (c) $2xy^2 - x^2y + 3xy^2 + 2x^2y + 3x^2y$
- (d) $5xy^2 + 2x^2y + 3xy^2 - 4x^2y + 3x^2y$
- (e) $(a + 3b - 2c) + (2a - b + c) - (3a - 2b + 4c)$
- (f) $(2a - 4b + c) + (4a - 5b + 2c) - (5a - 4b + 3c)$
- (g) $(2xy + 3yz + xz) + (xy - 4yz) - (-2xz + 3yz)$
- (h) $(xy - 2yz + 3xz) + (4xy + 2yz) - (3xz - 5yz)$

64. Állapítsuk meg az alábbi kifejezés előjelét:

- (a) $2a^2 + 3b^2$
- (b) $-2a^2b^2 - 3$
- (c) $-a^3 + 1$
- (d) $(2a - 3b)^2$
- (e) $3a^2 + 2$
- (f) $2a^2 + b^2 - 1$
- (g) $a^4 + 2a^2 + 9$

65. Állapítsuk meg az alábbi hatványban a pozitív változó(k) kitevőjét és előjelét:

- (a) $(x^2)^3$
- (b) $(x^{-4})^2$
- (c) x^3x^{-2}
- (d) y^2y^6
- (e) $(-z)^4$
- (f) $(-u)^5$
- (g) $(xy^2)^4$
- (h) $(x^2y^{-1}z^3)^2$
- (i) $(-xy^3z^{-5})^3$

66. Végezzük el a következő műveleteket:

- (a) $(x + 3y)^2$
- (b) $(2x - y)^2$
- (c) $(3x + 4y)^2$
- (d) $(2y - 3x)^2$
- (e) $(2x + y)^3$
- (f) $(x + 3y)^3$
- (g) $(2x - 2y)^3$
- (h) $(x - 4y)^3$
- (i) $(x + y - z)^2$
- (j) $(2x - y + 3z)^2$

67. Írjuk fel az alábbi kifejezést $(Ax \pm B)^2$ alakban:

- (a) $x^2 + 4x + 4$
- (b) $x^2 - 6x + 9$
- (c) $4x^2 - 4x + 1$
- (d) $16x^2 + 16x + 4$

68. Írjuk fel az alábbi kifejezést $(Ax \pm B)^2 + C$ alakban:

(a) $x^2 + 4x + 9$

(c) $25x^2 - 10x + 25$

(b) $x^2 - 8x + 17$

(d) $4x^2 - 12x + 10$

69. Végezzük el az alábbi szorzást/osztást:

(a) $(x^2 + 3x - 2) \cdot 4$

(g) $(8x^2 - 4x + 6) : 2$

(b) $(2x^2 - 4x + 3) \cdot 2x$

(h) $(3x^3 + 27x^2 - 9x) : 3x$

(c) $(3x^2 - 2x + 1) \cdot (3x - 1)$

(i) $(x^2 - 9) : (x + 3)$

(d) $(2x^2 - 4x + 7) \cdot (2x + 8)$

(j) $(8x^3 - 27) : (2x - 3)$

(e) $(x + 3)(x - 7) - (x - 3)(x + 7)$

(k) $(6x^2 + 5x^2 - 4x) : (2x - 1)$

(f) $(x^2 + 6x - 3) \cdot (4 - 3x)$

(l) $(2x^3 + 5x^2 + x + 12) : (x + 3)$

70. Határozzuk meg az alábbi kifejezések legnagyobb közös osztóját:

(a) $3x^2yz^3, -2xy^3z^3, x^7y^2z^2$

(b) $12x^2y^3z^2, -8xy^2z^5, 4x^5yz^3$

71. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

(a) $2x + 3x$

(f) $4x^2 - 9$

(b) $x^2 - 4x$

(g) $x^2 - 25y^2$

(c) $2x^2 + 8x$

(h) $27x^3 - 1$

(d) $x^2 + 8x + 12$

(e) $x^2 - 5x - 6$

(i) $125x^3 + 8y^3$

72. A változók mely értékeire nem értelmezhető az alábbi algebrai kifejezés?

(a) $\frac{x-3}{x+5}$

(d) $\frac{x-8}{(x+7)(x-5)}$

(b) $\frac{x+9}{x-12}$

(e) $\frac{x-4}{x^2-16}$

(c) $\frac{x+1}{(x-3)(x+1)}$

(f) $\frac{x+5}{x^2-25}$

73. Hogyan változik az alábbi kifejezés értéke, ha a változók háromszorosát írjuk be az alábbi kifejezésekbe? (háromszorosára növekszik; harmadára csökken; változik, de nem fejezhető ki szorzat alakkal; nem változik)

(a) $\frac{2x-3}{4x+5}$	(e) $\frac{3x^2+y^2}{2x-5y}$
(b) $\frac{x+7y}{3x-12y}$	(f) $\frac{4x^2+5y^2}{2x-8}$
(c) $\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$	(g) $\frac{5x^2-3y^2}{2x^3+5y^3}$
(d) $\frac{2x^2+y^2}{4x^2-9y^2}$	

74. Végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket, változik-e a tört értelmezési tartománya?

(a) $\frac{x}{4x}$	(g) $\frac{5x}{5x+15xy}$
(b) $\frac{7y}{28y}$	(h) $\frac{7x}{14x-21}$
(c) $\frac{9xy}{6x}$	(i) $\frac{2x^4-32}{x^2+4}$
(d) $\frac{12xz}{6x}$	(j) $\frac{6x+12}{x^3+8}$
(e) $\frac{3x^8y^2}{x^6y^3}$	(k) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$
(f) $\frac{2x^6y^5}{4x^5y^3}$	

75. Végezzük el az alábbi algebrai törtek összevonását:

(a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$	(g) $\frac{2x-3y}{x^2y} + \frac{x+4y}{xy^2}$
(b) $\frac{x}{3} + \frac{2y}{6}$	(h) $3 + \frac{2x-1}{4x+3}$
(c) $\frac{2x+1}{3y} - \frac{x-3}{3y}$	(i) $\frac{5x-1}{2x+7}$
(d) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4}$	(j) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-5}$
(e) $\frac{2}{x-3} + \frac{2x}{3-x}$	(k) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} + \frac{5x-3}{x^2-4}$
(f) $\frac{4}{2x-5} - \frac{7x}{5-2x}$	(l) $\frac{1}{2x^2+6x} - \frac{3-4x}{x^2-9} + 1$

76. Végezzük el az alábbi algebrai törtek szorzását, osztását:

(a) $\frac{x}{2} \cdot \frac{6}{x} = 3$	(d) $\frac{2x^2-3x}{5} \cdot \frac{25}{x}$
(b) $\frac{x^2-6x}{72} \cdot \frac{6}{x^2}$	(e) $\frac{27}{x^6} : \frac{6}{x^5}$
(c) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{2x+2y}{4x-4y}$	(f) $\frac{x^2-4}{x^2-x} : \frac{x^2+2x}{3x-3}$

$$(g) \frac{x^3 - 1}{2x + 6} : \frac{x^2 + x + 1}{(x + 3)^2}$$

77. Végezzük el az alábbi műveletet:

$$(a) \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right)$$

$$(b) \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right) : (x^2 - y^2) = \frac{1}{3(x+y)}$$

78. Írjuk fel az alábbi kifejezést tizedestört alakban:

$$(a) 2^{-2}$$

$$(c) \left(\frac{5}{2} \right)^{-2}$$

$$(b) 10^{-3}$$

$$(d) \left(\frac{10}{4} \right)^{-3}$$

79. Írjuk fel az alábbi kifejezést negatív hatványkitevővel:

$$(a) \frac{1}{4}$$

$$(d) \frac{1}{3}$$

$$(b) 0.01$$

$$(c) 0.125$$

$$(e) \frac{1}{125}$$

80. Állapítsuk meg az alábbi kifejezésben az egyes változók kitevőjét:

$$(a) \frac{xy^2z^3}{x^4y^3z^2}$$

$$(b) \frac{x^5y^2z^{-3}}{x^{-2}y^4z^5}$$

81. Állapítsuk meg az alábbi kifejezésben az egyes változók kitevőjét:

$$(a) (x^2yz^5)(x^{-1}z^4)$$

$$(b) (x^3y^{-5}z^2)(x^{-2}y^4z^3)$$

$$(c) (xyz^2) : (x^3yz)$$

$$(d) (x^4y^{-3}z^{-2}) : (x^{-2}y^3z^{-5})$$

82. Számítsuk ki az alábbi gyököket:

$$(a) \sqrt{25}$$

$$(d) \sqrt{2025}$$

$$(f) \sqrt{\frac{4}{169}}$$

$$(b) \sqrt{49}$$

$$(c) \sqrt{1296}$$

$$(e) \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$(g) \sqrt{\frac{25}{529}}$$

(h) $\sqrt{\frac{625}{225}}$

(i) $\sqrt{16 \cdot 36}$

(k) $\sqrt{64 \cdot 1764}$

(j) $\sqrt{4 \cdot 184}$

(l) $\sqrt{121 \cdot 1089}$

83. Határozzuk meg az alábbi négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartományát:

(a) $\sqrt{x}$

(c) $\sqrt{2x+6}$

(b) $\sqrt{x+5}$

(d) $\sqrt{8-3x}$

84. Mely kifejezéssel egyezik meg az alábbi gyökös kifejezés:

(a) $\sqrt{(x-2)^2}$

(d) $\sqrt{(x+3)^2}$

(b) $\sqrt{(x-2)^2}$, ha $x \geq 2$

(e) $\sqrt{(x+3)^2}$, ha $x < -3$

(c) $\sqrt{(x-2)^2}$, ha $x \leq 2$

(f) $\sqrt{(x+3)^2}$, ha $x > -3$

85. Milyen x -re áll fen az alábbi egyenlőség?

(a) $\sqrt{x^2+4x+4} = x+2$

(b) $\sqrt{x^2+4x+4} = -x-2$

(c) $\sqrt{x^2-6x+9} = |x-3|$

(d) $\sqrt{16x^2-24x+9} = 3-4x$

86. Emeljük ki a lehető legbővebb kifejezés a gyökjel elé:

(a) $\sqrt{12x^3y^2}$, ha $0 < x, y$

(e) $\sqrt{80x^4y^2}$, ha $x < 0 < y$

(b) $\sqrt{27x^5y^4}$, ha $y < 0 < x$

(f) $\sqrt{81x^6y^4}$, ha $x, y < 0$

(c) $\sqrt{16x^4y^2}$, ha $0 < y$

(g) $\sqrt{125xy^6}$, ha $y < 0 < x$

(d) $\sqrt{36x^8y^6}$, ha $x, y < 0$

(h) $\sqrt{144xy^3}$, ha $x, y < 0$

87. Írjuk fel az alábbi kifejezést egy gyökjel alá:

(a) $x^2y^2\sqrt{2xy^3}$, ha $0 < x, y$

(c) $5xy^2\sqrt{3xy}$, ha $x, y < 0$

(b) $3xy^3\sqrt{5x^2y^4}$, ha $x, y < 0$

(d) $7xy^2\sqrt{x^2y^3}$, ha $x < 0 < y$

88. Végezzük el az alábbi gyökös kifejezések szorzását és emeljük ki a lehető legnagyobb tagot a gyökjel elé:

- (a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$ (d) $\sqrt{x^2 y^4} \cdot \sqrt{9x^3 y^6}$, ha $0 < x, y$
 (b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ (e) $\sqrt{3xy^6} \cdot \sqrt{75xy^4}$, ha $0 < x, y$
 (c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{16}{5}}$ (f) $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{19} + \sqrt{3}}$
 (g) $(2\sqrt{3} - 4)(2\sqrt{3} + 4)$

89. Végezzük el az alábbi gyökös kifejezések osztását:

- (a) $12\sqrt{3} : 4$ (c) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$
 (b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{6}$ (d) $\sqrt{125} : \sqrt{5}$

90. Végezzük el az alábbi gyökös kifejezések hatványozását:

- (a) $(\sqrt{3})^2$ (e) $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$
 (b) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$ (f) $(\sqrt{\sqrt{50} - 1} + \sqrt{\sqrt{50} + 1})^2$
 (c) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$ (g) $(3\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{y})^2$
 (d) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})^2$

91. Gyöktelenítsük az alábbi törtet:

- (a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (f) $\frac{5\sqrt{5} - \sqrt{125} + \sqrt{45}}{\sqrt{3}}$
 (b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ (g) $\frac{8}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}$
 (c) $\frac{5-x}{\sqrt{5-x}}$ (h) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
 (d) $\frac{5}{\sqrt{8} + \sqrt{3}}$ (i) $\frac{3}{2 - \sqrt{5}}$
 (e) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}}$ (j) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$

92. Végezzük el az alábbi műveletet:

$$\left(\frac{2}{2 - \sqrt{3}} + \frac{-66}{\sqrt{3} + 5} - \frac{184}{7 - \sqrt{3}} \right) \cdot (\sqrt{3} + 39)$$

Egyenletek, egyenlőtlenségek

93. Oldjuk meg az alábbi elsőfokú, vagy elsőfokúra visszavezethető egyenletet a valós számok legbővebb részhalmazán:

- (a) $x - 3 = 0$
 (b) $2x - 4 = 0$
 (c) $8x + 16 = 0$
 (d) $4x + 9 = 7x + 6$
 (e) $x + 8 = 3x + 14$
 (f) $7x + 8 = 3x + 12$
 (g) $2[3 - (x + 1)] = 8$
 (h) $\left(\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15}$
 (i) $\frac{2}{4x + 4} + \frac{3}{x + 1} = 1$
 (j) $\frac{3 - x}{x - 2} - 2 = \frac{10}{x - 2}$
 (k) $\frac{x + 4}{x - 1} - \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{x + 9}{x^2 - 1}$
- (l) $\frac{x - 1}{x - 3} - \frac{x + 7}{x + 3} = \frac{x + 6}{x^2 - 9}$
 (m) $\frac{2x - 3}{6x - 1} \cdot \frac{9x - 4}{3x - 2} = 1$
 (n) $\frac{2x - 3}{x^2 + x} + \frac{2x - 4}{2x^2 + 2x} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x + 1}$
 (o) $\frac{3}{x - 5} = \frac{2x + 1}{3x - 15}$
 (p) $\frac{x - 4}{3} \cdot \frac{x - 7}{x} = \frac{x + 1}{x} + \frac{x - 9}{3}$
 (q) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = 2x + 1$
 (r) $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 4x - 6$
 (s) $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = -5x - 2$

94. Milyen x elégíti ki az $(x - A)(x - B) = 0$ egyenletet?

- (a) $(x + 5)(x - 3)$
 (b) $(x - 2)(x - 1)$
 (c) $(x + 9)(2x + 4)$

95. Adjuk meg az alábbi elsőfokú, vagy elsőfokúra visszavezethető egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán:

- (a) $2x + 1 \geq 3$
 (b) $x - 4 < 5$
 (c) $4 - 3x \geq 7$
 (d) $2x - 1 \leq x + 8$
 (e) $4x - 7 > x + 2$
 (f) $x - 9 \geq 3x + 5$
 (g) $(x - 3)^2 \geq (x - 5)^2$
 (h) $(2x - 8)^2 < (2x - 1)^2$
 (i) $(3x + 1)^2 + 6x + 1 \geq (3x - 2)^2 + 2x + 3$
- (j) $3 \leq 4x - 1 \leq 7$
 (k) $5 \leq 2x - 3 < 7$
 (l) $-1 \leq 2 - 3x \leq 5$
 (m) $\frac{5}{x - 3} \geq 0$
 (n) $\frac{7}{9 - 2x} \geq 0$
 (o) $\frac{3}{x - 7} \geq 1$
 (p) $\frac{3}{6 - 2x} \geq 1$

96. Oldjuk meg az alábbi abszolút értéket tartalmazó egyenletet a valós számok legbővebb részhalmazán:

- (a) $|x - 5| = 7$
- (b) $|x + 3| = 1$
- (c) $|x + 4| = -3$
- (d) $3|x| + 1 = |x| + 9$
- (e) $|x - 3| = |x + 1|$
- (f) $|x + 4| = |x - 8|$
- (g) $|3x - 2| = 3 - 2x$
- (h) $|3x - 7| = 7 - x$
- (i) $\left| \frac{2x - 6}{x - 1} \right| = 2$

97. Adjuk meg az alábbi abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán:

- (a) $|x - 3| < |x + 5|$
- (b) $|x - 7| \geq |x - 2|$
- (c) $|2x + 3| \leq 1$
- (d) $|3x - 1| \geq -1$
- (e) $|x - 7| \geq 3$
- (f) $\frac{2}{|x + 5|} \geq 1$

98. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet a valós számok halmazán:

- (a) $x^2 = 9$
- (b) $4^2 = 16$
- (c) $2x^2 + 6x = 0$
- (d) $-7x^2 + x = 0$
- (e) $(x - 3)^2 = 25$
- (f) $x^2 + 6x + 8 = 0$
- (g) $x^2 - 7x + 10 = 0$
- (h) $x^2 + x - 6 = 0$
- (i) $x^2 + 16x + 64 = 0$
- (j) $x^2 + 8x + 20 = 0$

99. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet teljes négyzetté való kiegészítéssel a valós számok halmazán:

- (a) $x^2 + 4x + 4 = 0$
- (b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- (c) $x^2 - 6x + 5 = 0$
- (d) $x^2 - x - 20 = 0$
- (e) $x^2 + 6x - 16 = 0$
- (f) $x^2 - 4x + 5 = 0$
- (g) $x^2 + x + 1 = 0$

100. Az egyenlet megoldása nélkül döntsük el, hány gyöke van az alábbi másodfokú egyenletnek:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| (a) $x^2 - 2x - 24 = 0$ | (e) $x^2 + x + 3 = 0$ |
| (b) $x^2 + 10x + 25 = 0$ | (f) $x^2 - 24x + 144 = 0$ |
| (c) $x^2 - 12x + 27 = 0$ | (g) $x^2 + 14x + 50$ |
| (d) $x^2 + 12x + 32 = 0$ | (h) $x^2 - 11x + 24$ |

101. Az egyenlet megoldása nélkül döntsük el, milyen előjelűek az alábbi másodfokú kifejezés gyöke(i):

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) $x^2 + 11x + 18 = 0$ | (g) $x^2 + 8x = 0$ |
| (b) $x^2 + 5x - 24 = 0$ | (h) $x^2 - 3x = 0$ |
| (c) $x^2 + 14x + 49 = 0$ | (i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ |
| (d) $x^2 + 16x + 63 = 0$ | (j) $x^2 + 11x + 30 = 0$ |
| (e) $x^2 - 3x + 2 = 0$ | (k) $x^2 - 18x + 81 = 0$ |
| (f) $x^2 + 2x - 63 = 0$ | (l) $x^2 + x + 8$ |

102. Írjunk fel olyan másodfokú 1 főegyütthatós egyenletet, melynek

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) gyöke az 1 és a 3 | (d) gyöke a -1 és a 3 |
| (b) gyöke a -2 és a 0 | (e) gyöke a -3 és a 9 |
| (c) kétszeres gyöke az 1 | (f) kétszeres gyöke a -3 |

103. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

- | | |
|---|----------------------------|
| (a) $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} = 3$ | (c) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ |
| (b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ | (d) $x^3 + 8x^2 - 9x = 0$ |

104. Oldjuk meg az alábbi harmadfokú egyenletet a valós számok halmazán alkalmas tényező kiemelésével, ha tudjuk, hogy az egyik gyök A:

- (a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0, A = 2$
 (b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, A = -1$
 (c) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0, A = 3$
 (d) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0, A = 2$

105. Adjuk meg az alábbi másodfokú kifejezést tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán:

- | | |
|------------------------------------|--|
| (a) $x^2 > 9$ | (j) $x^2 + 7x + 10 \geq 0$ |
| (b) $x^2 \leq 4$ | (k) $x^2 - 9x - 10 < 0$ |
| (c) $x^2 - 25 \geq 0$ | (l) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$ |
| (d) $81 - x^2 \leq 0$ | (m) $-x^2 + 10x - 21 \leq 0$ |
| (e) $2x(x - 3) < 0$ ($A > 0$) | (n) $-x^2 - 6x - 8 > 0$ |
| (f) $3x(x + 9) \geq 0$ ($A > 0$) | (o) $\frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 3} \leq 0$ |
| (g) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ | (p) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 3x + 2} < 0$ |
| (h) $x^2 + 16x + 64 > 0$ | |
| (i) $x^2 - 6x + 8 < 0$ | |

106. Oldjuk meg az alábbi abszolút értéket tartalmazó, másodfokú egyenletet a valós számok halmazán:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| (a) $x^2 - 6 x + 9 = 0$ | (e) $(x - 3)^2 = 2 x - 6$ |
| (b) $x^2 - 15 x + 54 = 0$ | (f) $ x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + 2$ |
| (c) $x^2 + 6 x + 5 = 0$ | (g) $ x^2 - 8x + 15 = 8x - 15 - x^2$ |
| (d) $x^2 + 3 x - 10 = 0$ | |

107. Adjuk meg az alábbi abszolút értéket tartalmazó, másodfokú egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán:

- (a) $|x^2 - 4x| \leq 12$
 (b) $|x - 5| > |x^2 - 12x + 33|$

108. Állapítsuk meg az alábbi gyökös kifejezés értelmezési tartományát:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| (a) $\sqrt{x - 2}$ | (e) $\sqrt{ x - 5 }$ |
| (b) $\sqrt{x + 4}$ | (f) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ |
| (c) $\sqrt{2x - 5}$ | (g) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ |
| (d) $\sqrt{5 - 6x}$ | (h) $\sqrt{3 - 2x - x^2}$ |

109. Oldjuk meg az alábbi kétváltozós egyenletrendszert:

- (a)
$$\begin{array}{rcl} 4x & +y & = 2 \\ x & -3y & = -6 \end{array}$$
- (b)
$$\begin{array}{rcl} 3x & -2y & = 9 \\ 4x & +y & = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(c)} & 2x & +y = 4 \\ & 3x & -8y = -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(d)} & 2x & -y = 2 \\ & 2y & -4x = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(e)} & 3x & -2y = 2 \\ & 6x & -4y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(f)} & 2x & -7y = 3 \\ & 6x & -14y = 10 \end{array}$$

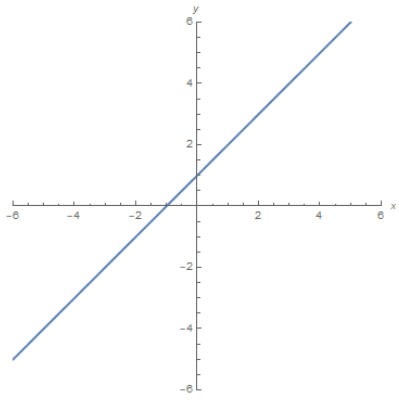
$$\begin{array}{rcl} \text{(g)} & \frac{1}{x} & +\frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \\ & x & -y = 1 \end{array}$$

Megoldások-Halmazelmélet

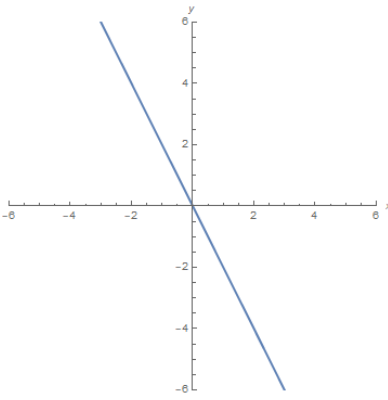
- | | | |
|---------------------|----------------------|--|
| 1. (a) $\mathbb{R}$ | (e) egyik sem | (i) $\mathbb{R}$ |
| (b) $\mathbb{Q}$ | (f) $\mathbb{Q}$ | (j) $\mathbb{Q}$ |
| (c) $\mathbb{Z}$ | (g) $\mathbb{Q}$ | (k) egyik sem |
| (d) $\mathbb{R}$ | (h) $\mathbb{Q}$ | (l) $\mathbb{N}$ |
| 2. (a) igaz | (d) hamis | (g) hamis |
| (b) igaz | (e) igaz | (h) igaz |
| (c) hamis | (f) hamis | (i) igaz |
| 3. (a) $]3, 5[$ | (e) $] - \infty, 3[$ | (i) $] - \infty, 2[\cup]7, \infty[$ |
| (b) $[2, 7[$ | (f) $] - \infty, 8]$ | (j) $] - \infty, -3] \cup]4, \infty[$ |
| (c) $]0, 1]$ | (g) $]2, \infty[$ | (k) $] - \infty, 8[\cup]12, \infty[$ |
| (d) $[-3, 5]$ | (h) $[-13, \infty[$ | (l) $] - \infty, 0] \cup [9, \infty[$ |
| 4. (a) igaz | (d) hamis | (g) hamis |
| (b) hamis | (e) igaz | (h) igaz |
| (c) igaz | (f) igaz | (i) hamis |

Megoldások-Függvénytan

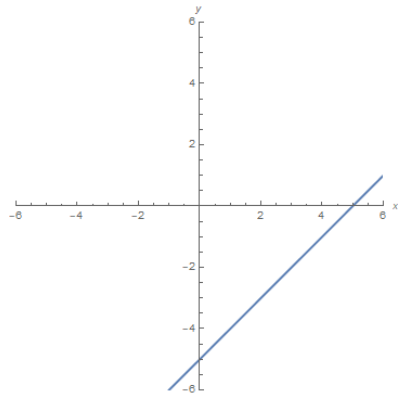
5. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Hol metszik az alábbi függvények az x és y tengelyeket (9-10)?
6. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mely pontokban nincsenek értelmezve az alábbi függvények (9-10)?
7. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek (9-10)?
8. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mi az értelmezési tartománya az alábbi függvényeknek (9-10)?
9. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Milyen tartományon szigorúan monoton növekszik az alábbi függvények (9-10)?
10. (a) $x \mapsto 3x + 3$



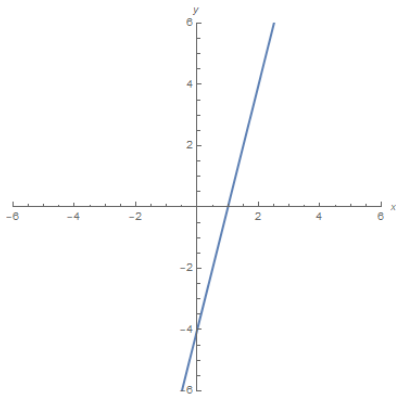
(a) $x \mapsto x + 1, x_0 = -1, y_0 = 1$



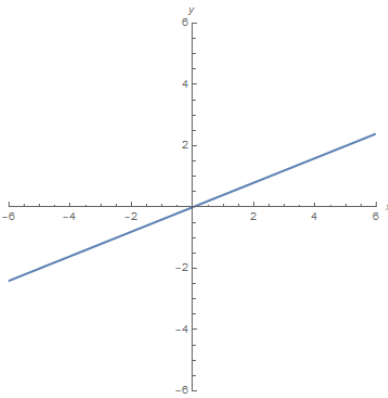
(b) $x \mapsto -2x, x_0 = 0, y_0 = 0$



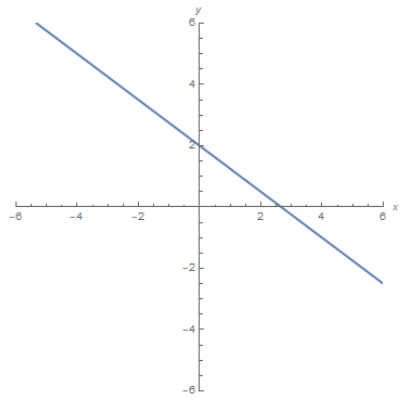
(c) $x \mapsto x - 5, x_0 = 5, y_0 = -5$



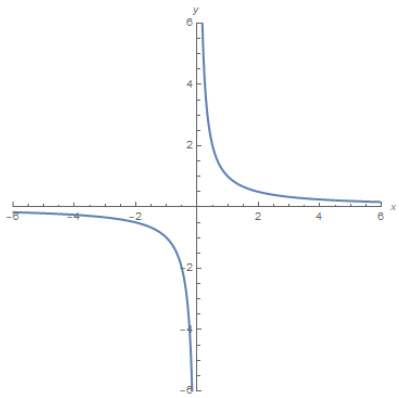
(d) $x \mapsto 4x - 4, x_0 = 1, y_0 = -4$



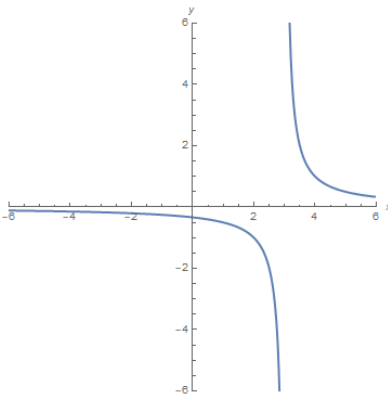
(e) $x \mapsto \frac{2}{5}x, x_0 = 0, y_0 = 0$



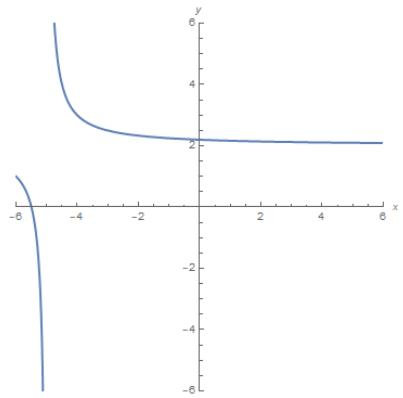
(f) $x \mapsto -\frac{3}{4}x + 2, x_0 = \frac{8}{3}, y_0 = 2$



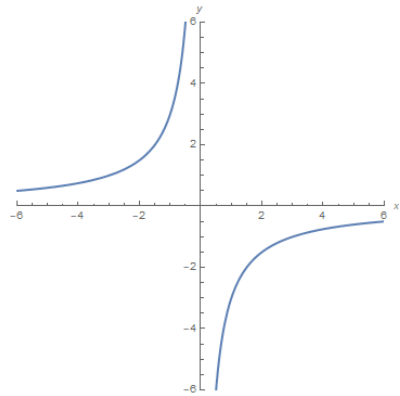
(a) $x \mapsto \frac{1}{x}, x = 0$



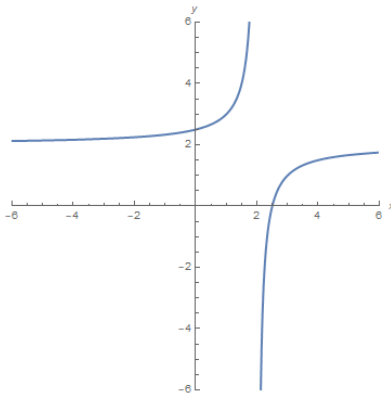
(b) $x \mapsto \frac{1}{x-3}, x = 3$



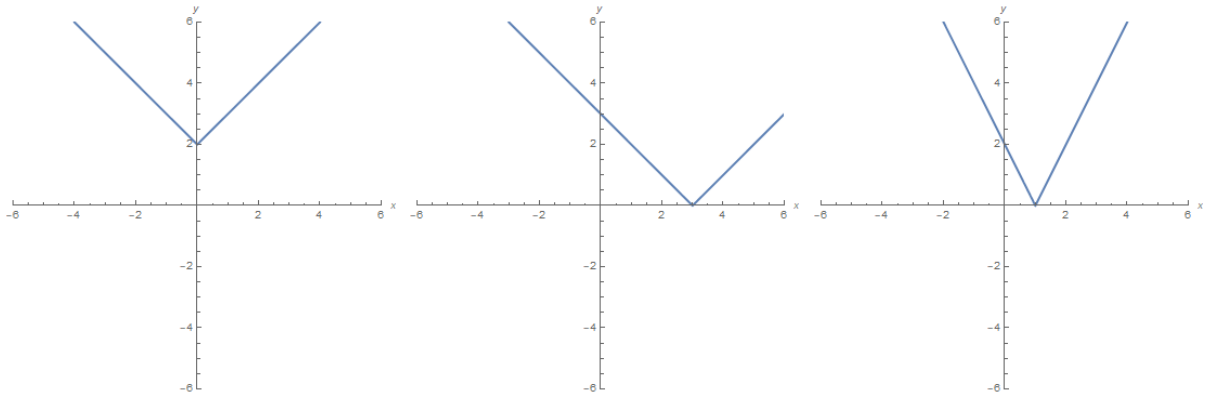
(c) $x \mapsto \frac{1}{x+5} + 2, x = 5$



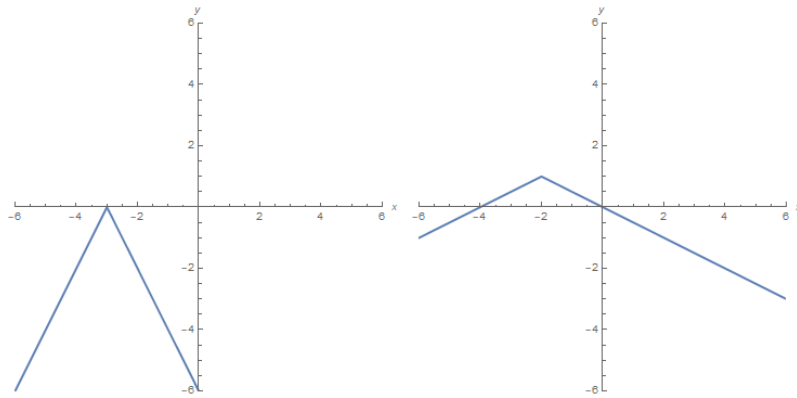
(d) $x \mapsto -\frac{3}{x}, x = 0$



(e) $x \mapsto -\frac{1}{x-2} + 2, x = 2$



- (a) $x \mapsto |x| + 2, R_f = [2, \infty[$ (b) $x \mapsto |x - 3|, R_f = [0, \infty[$ (c) $x \mapsto 2|x - 1|, R_f = [0, \infty[$



- (d) $x \mapsto -2|x + 3|, R_f =]-\infty, 0]$ (e) $x \mapsto -\frac{1}{2}|x + 1| + 1, R_f =]-\infty, 1]$

(b) $x \mapsto 3(x - 5)$

(c) $x \mapsto -3x$

(d) $x \mapsto x$

(e) $x \mapsto -9x$

11. (a) $x \mapsto x^2 - 4$

(b) $x \mapsto (x + 1)^2$

(c) $x \mapsto -x^2$

(d) $x \mapsto (x - 3)^2 + 2$

(e) $x \mapsto (x + 3)^2 - 5$

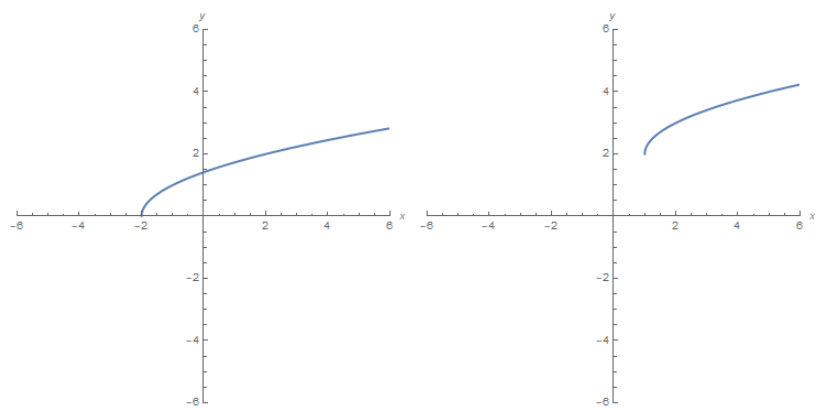
(f) $x \mapsto -(x - 1)^2 + 4$

12. (a) $x \mapsto \sqrt{x} - 2$

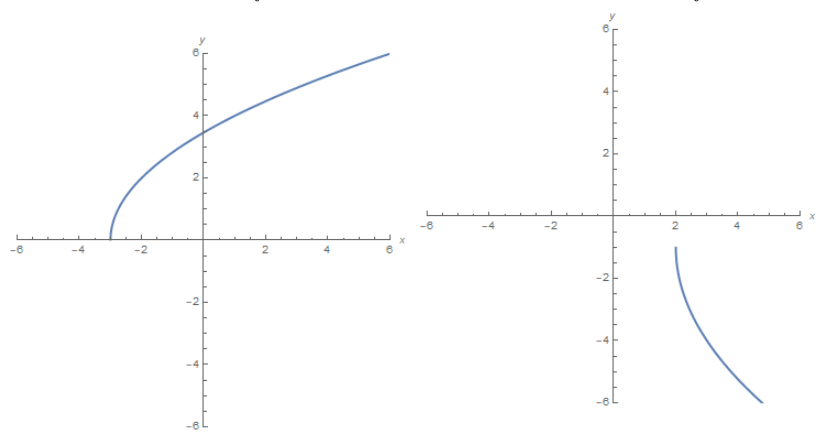
(b) $x \mapsto \sqrt{x - 3}$

(c) $x \mapsto \sqrt{x + 2} + 1$

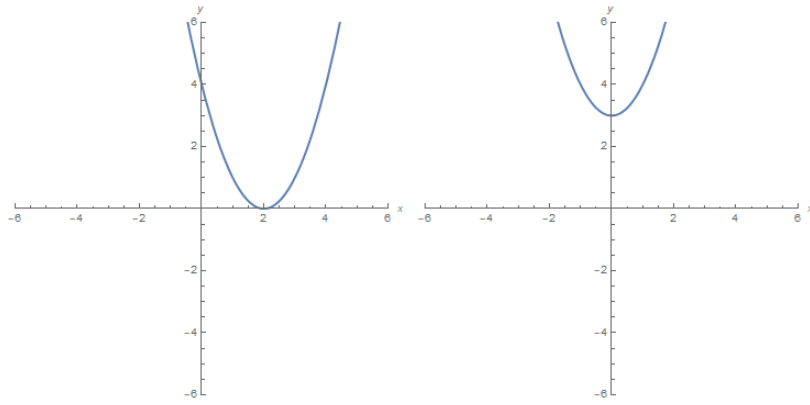
(d) $x \mapsto \sqrt{-x}$



(a) $x \mapsto \sqrt{x+2}, D_f = [-2, \infty[$ (b) $x \mapsto \sqrt{x-1}+2, D_f = [1, \infty[$

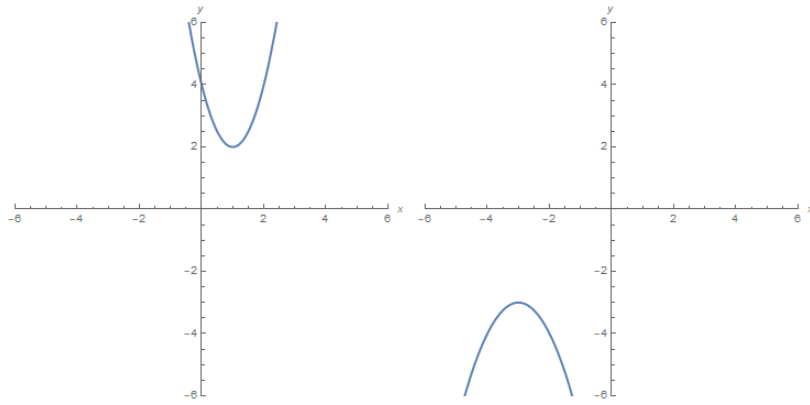


(c) $x \mapsto 2\sqrt{x+3}, D_f = [-3, \infty[$ (d) $x \mapsto -3\sqrt{x-2}-1, D_f = [2, \infty[$



(a) $x \mapsto (x - 2)^2, [2, \infty[$

(b) $x \mapsto x^2 + 3, [0, \infty[$



(c) $x \mapsto 2(x - 1)^2 + 2, [1, \infty[$ (d) $x \mapsto -(x + 3)^2 - 3,]-\infty, -3]$

(e) $x \mapsto \sqrt{4 - x}$

(f) $x \mapsto -\sqrt{x - 1} - 2$

13. (a) $x \mapsto |x + 2|$

(b) $x \mapsto |x| + 4$

(c) $x \mapsto |x - 1| - 2$

(d) $x \mapsto -|x|$

(e) $x \mapsto -|x| - 3$

(f) $x \mapsto -|x + 3| - 2$

14. (a) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

(b) $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$

(c) $x \mapsto \frac{1}{x-2} + 3$

(d) $x \mapsto -\frac{1}{x}$

(e) $x \mapsto -\frac{1}{x}$

(f) $x \mapsto -\frac{1}{x} + 2$

$$(g) \quad x \mapsto -\frac{1}{x-3}$$

$$(h) \quad x \mapsto -\frac{1}{x-1} - 4$$

15. (a) rajta (d) rajta (g) rajta (j) rajta (m) rajta
 (b) felette (e) alatta (h) alatta (k) felette (n) alatta
 (c) alatta (f) felette (i) felette (l) alatta (o) felette

16. A hengerben lévő víz mennyisége miliméterben: $h \mapsto 8h + 10$, ahol h az eltelt órák száma. 14 órákor 42mm víz volt a mérőpohárban.

17. A 12m^3 víz pontosan 12000dm^3 , ami 12000 liter. Így a víz mennyisége a medencében $p \mapsto 12000 - 10p$, ahol p az eltelt percek száma. A $12000 - 10p = 0$ egyenletnek a $p = 1200$ a megoldása, vagyis 20 óra alatt ürül ki a medence.

18. A profit forintban $d \mapsto 6000d - 360000$, ahol d az eladott dobozok száma. A haszon 90000 Ft.

19. (a) A képletbe helyettesítve: $\frac{a}{2}10^2 = 500$ egyenlet adódik, ami a megoldása az $a = 10\frac{m}{s^2}$

(b) A megadott adatok alapján a B autó gyorsulása $6\frac{m}{s^2}$, így a megtett út 300 méter.

20. A távolság megtételéhez $t = \frac{100}{v}$ idő szükséges.

21. A szántáshoz szükséges idő órában: $d \mapsto \frac{80}{d}$, ahol d a traktorok darabszáma. Így 8 traktor esetén 10 óra kell a szántáshoz, azaz 11 a szünettel együtt.

22. Mazsolának összesen $|x - 3|$ egységet kell szaladnia, ha a pozíciókat az x jelöli.

23. Ha a terület szélessége és hossza is a , akkor a területe: $T = a^2$, amiből $a = \sqrt{T}$. A kerítés hossza pedig $3a$, így a szükséges kerítéshossza a terület függvényében: $T \mapsto 3\sqrt{T}$.

24. Az elérhető terület egy kör, aminek területe: $l \mapsto l^2\pi$, ahol l a pánya hossza. Így kétszeres területhez elég a pánya eredeti hosszának $\sqrt{2}$ szerese.

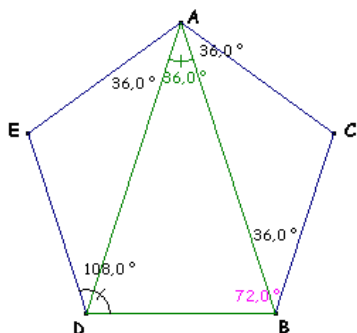
Geometria-Megoldások

25. (a) $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(b) $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

- (c) $\frac{a}{c} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 12$
- (d) $\frac{b}{c} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 6$
- (e) $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow a = b \Rightarrow c = \sqrt{2}a \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$
- (f) Legyen m_c magasság talpponja c -n T . Ekkor $BCT\Delta \sim BAC\Delta$. De Pithagorsz tétel miatt $TB = 3$, így $\frac{a}{b} = \frac{TB}{m_c} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{16}{3}$
- (g) $10 = T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = 4$
- (h) $\frac{m_c}{b} = \sin 30^\circ \Rightarrow b = 4$ és $\frac{b}{c} = \cos 30^\circ \Rightarrow c = \frac{8}{\sqrt{3}}$
- (i) $T = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow b = 12 \Rightarrow c = 13$
- (j) A háromszögünk egyenlő szárú derékszögű, egy a magassága éppen az átfogó fele, azaz $c = 6 \Rightarrow T = 9$.
26. (a) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (i) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (m) $\sqrt{3}$
- (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (j) 1 (n) 1
- (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (g) $\frac{1}{2}$ (k) $\sqrt{3}$ (o) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (d) 1 (h) 0 (l) nincs értel- (p) 0
mezve
27. (a) π (d) $\frac{\pi}{6}$
- (b) $\frac{\pi}{2}$ (e) $\frac{3\pi}{2}$
- (c) $\frac{\pi}{3}$ (f) $\frac{\pi}{12}$
28. (a) "A tengelyes tükrözés *megváltoztatja* a körüljárási irányt", **vagy** "A középpontos tükrözés megőrzi a körüljárási irányt."
- (b) Igaz
- (c) "A középpontos tükrözés tekinthető egy fix pont körüli 180° -os forgatásnak".
- (d) "A tengelyes tükrözésnek pontosan egy *fix egyenese* van.", **vagy** "A középpontos tükrözésnek pontosan egy fixpontja van."
- (e) Igaz
- (f) "Egy egyenesnek és a tengelyesen tükrözött képének 0 , 1 vagy *végtelen sok* közös pontja van."
29. Pontosán négyszer kell elforgatni, mindig 72° -os szöggel. Az ötödik forgatás az eredeti pontot adja, mert $5 \cdot 72^\circ = 360^\circ$.

30. A szabályos ötszög minden belső szöge 108° . Egy csúsból kiinduló két átló három egyenlő szárú háromszögre bontja az ötszöget, melyek közül egy belső szöge $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$, kettőnek pedig $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$. Az egyik behúzott átló így váltószöget képez a másik átló és egy oldal között, így azok párhuzamosak.



31. Ha a belső szög 150° , akkor minden külső szög 30° , és a külső szögek összege pontosan 360° , így ez egy 12-szög.
32. Egy szabályos n -szög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, azaz jelen esetben $22 \cdot 180^\circ = 4320^\circ$. Ekkor egy csúcsra $\frac{4320^\circ}{24} = 165^\circ$ jut.
33. Hasonlóan az előzőhöz, 178° .
34. Minden konvex n -szög külső szögeinek összege 360° .
35. Minden szemben lévő csúcspáron át húzott egyenes és minden szemben lévő oldalpár felező merőlegese szimmetriatengely. Mindkettőből n db van, így a válasz $2n$.
36. Minden oldalhoz tartozó oldalfelező átmegy egy szemközti csúcson, így $2n - 1$ szimmetriatengelye van.
37. (a) $T = \frac{15}{360} \cdot 6^2 \pi = \frac{3\pi}{2}$ $K = \frac{15}{360} \cdot 6 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$
- (b) $T = 3\pi$, $K = \pi$ (f) $T = 12\pi$, $K = 4\pi$
- (c) $T = \frac{9\pi}{2}$, $K = \frac{3\pi}{2}$ (g) $T = 18\pi$, $K = 6\pi$
- (d) $T = 6\pi$, $K = 2\pi$
- (e) $T = 9\pi$, $K = 3\pi$ (h) $T = 27\pi$, $K = 9\pi$
38. A középpontból a húr bocsátott merőleges felezi a húr hosszát. Az adódó derékszögű háromszögben az átfogó a sugár, a távolság az egyik befogó, a húr fele a másik befogó. Így a húr hossza 6cm.

39. 13cm

40. Az érintési pontban derékszög van, így az érintők hossza 6cm.
41. Az órán két szomszédos szám között 30° a különbség.
- | | |
|------------------|------------------|
| (a) 120° | (d) $47,5^\circ$ |
| (b) $67,5^\circ$ | (e) 10° |
| (c) 165° | (f) 33° |
42. Az érintő szög éppen a fele a középponti szögnek, így 60° .
43. A körülírt kör középpontja a Thalesz tétel miatt éppen az átfogó felezőpontja, így a körülírt kör sugara 5cm.
44. A szelő egyik oldalán lévő körívről 20° , épp fele a középponti szögnek, a másik körívről a húrnégyszögek miatt 160° .
45. Igen, a húr által meghatározott két körív minden pontjából ugyanakkora kerületi szög.
46. (a) Nem feltétlenül, csak ha a nagyobb oldallal szemközti szögek egyenlők.
 (b) Igen
 (c) Ekkor csak hasonlók.
 (d) Igen
47. (a) Igen
 (b) Nem, ez egy síkot határoz meg.
 (c) Igen
 (d) Nem, ez egy síkot határoz meg.
 (e) Igen
48. (a) Nem, ez egy egyenest határoz meg.
 (b) Igen
 (c) Igen
 (d) Nem, ez még végtelen sok síkot határoz meg.
 (e) Igen
 (f) Nem, csak ha metszőek, vagy párhuzamosak.
49. (a) Pontot és síkot

- (b) Síkot
- (c) Síkot
- (d) Pontot
- (e) Egyenest
- (f) Pontot

Vektorok-Megoldások

50. Csak a nullvektor

51. (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 (b) $\overrightarrow{AD}$
 (c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
 (d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

52. (a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ (d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
 (b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ (e) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$
 (c) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

53. Nullvektor

54. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

55. A B -hez közelebbi harmadolópontba a $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ mutat. A C -hez közelebbi harmadolópontba a $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ mutat.

56. (a) $x = 2, y = 6$
 (b) $x = 1, y = -1$

57. Az a elforgatott képei egy szabályos $|a|$ oldalú hatszöget adnak ki.

- (a) $a^{**} = a^* - a$
- (b) $a^{***} = -a$

58. Igen, a nullvektor.

59. Párhuzamos az egyenessel.

60. Nincs megkötés O pontra, minden vektorra igaz az állítás.

Algebra-Megoldások

Algebrai kifejezések

61. (a) 5 (c) 9
(b) 7 (d) 9
62. (a) -1, 3, 8, 1 (b) $\frac{3}{4}$, -18, 9, $-\frac{3}{4}$
63. (a) $3ab + 4b^2$ (e) $a + 4b - 5c$
(b) $8ab + b^2$ (f) $a - 5b$
(c) $5xy^2 - 3x^2y$ (g) $3xy + 3xz + 2yz$
(d) $8xy^2 + x^2y$ (h) $5xy + 5yz$
64. (a) 0+ (e) +
(b) - (f) bármilyen
(c) bármilyen (g) +
(d) 0+ (h) +
65. (a) 6, + (f) x:4, y:8, +
(b) -8, + (g) x:4, y:-2, z:6, +
(c) 8, + (h) x:-4, y:-2, +
(d) 4, + (i) x:3, y:9, z:-15, -
(e) 5, -
66. (a) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (f) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$
(b) $4x^2 - 4xy + y^2$ (g) $8x^3 - 24x^2y + 24xy^2 - 8y^3$
(c) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ (h) $x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$
(d) $4y^2 - 12yx + 9x^2$ (i) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$
(e) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$ (j) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz$
67. (a) $(x + 2)^2$ (c) $(2x - 1)^2$
(b) $(x - 3)^2$ (d) $(4x + 2)^2$
68. (a) $(x + 2)^2 + 5$ (c) $(5x - 1)^2 + 24$
(b) $(x - 4)^2 + 1$ (d) $(2x - 3)^2 + 1$

69. (a) $4x^2 + 12x - 8$
 (b) $4x^2 - 8x^2 + 6x$
 (c) $9x^3 - 9x^2 + 5x - 1$
 (d) $4x^3 + 8x^2 - 18x + 56$
 (e) $-8x$
 (f) $-3x^3 - 14x^2 + 33x - 12$
70. (a) xyz^2
71. (a) $5x$
 (b) $x(x - 4)$
 (c) $2x(x + 4)$
 (d) $(x + 2)(x + 6)$
 (e) $(x - 6)(x + 1)$
72. (a) -5
 (b) 12
 (c) $-1, 3$
73. (a) nem kifejezhető
 (b) nem változik
 (c) nem változik
 (d) nem változik
74. (a) $\frac{1}{4}$, igen
 (b) $\frac{1}{4}$, igen
 (c) $\frac{3y}{2}$, igen
 (d) $2z$, igen
 (e) $\frac{3x^2}{y}$, igen
 (f) $\frac{xy^2}{2}$, igen
75. (a) $\frac{x + y}{2}$
 (b) $\frac{x + y}{3}$
- (g) $4x^2 - 2x + 3$
 (h) $x^2 + 9x - 3$
 (i) $x + 3$
 (j) $4x^2 + 6x + 9$
 (k) $3x^2 + 4x$
 (l) $2x^2 - x + 4$
- (b) $4xyz^2$
- (f) $(2x - 3)(2x + 3)$
 (g) $(x - 5y)(x + 5y)$
 (h) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$
 (i) $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$
- (d) $-7, 5$
 (e) $-4, 4$
 (f) $-5, 5$
- (e) háromszorosára nő
 (f) nem kifejezhető
 (g) harmadára csökken
- (g) $\frac{1}{1 + 3y}$, igen
 (h) $\frac{x}{2x - 3}$, nem
 (i) $2(x^2 - 4)$, nem
 (j) $\frac{6}{x^2 - 2x + 4}$, igen
 (k) $\frac{x + 3}{x - 2}$, igen
- (c) $\frac{x + 4}{3y}$
 (d) $\frac{4x - 3y}{12}$

- (e) $\frac{2-2x}{x-3}$
- (f) $\frac{7x+4}{2-5}$
- (g) $\frac{x^2+6xy-3y^2}{x^2y^2}$
- (h) $\frac{14x+8}{4x+3}$
76. (a) 3
- (b) $\frac{x-6}{12x}$
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) $10x-15$
77. (a) $\frac{x}{3}$
78. (a) 0, 25
- (b) 0, 001
79. (a) 2^{-2}
- (b) 10^{-2}
- (c) 2^{-3}
80. (a) x:-3, y:-1, z:1
81. (a) x:1, y:1, z:9
- (b) x:1, y:-1, z:5
82. (a) 5
- (b) 7
- (c) 36
- (d) 45
- (e) $\frac{3}{4}$
- (f) $\frac{2}{13}$
- (g) $\frac{5}{23}$
- (h) $\frac{5}{3}$
- (i) 24
- (j) 28
- (k) 336
- (l) 363
83. (a) $0 \leq x$
- (b) $-5 \leq x$
- (c) $-3 \leq x$
- (d) $\frac{8}{3} \leq x$
- 84.
- (i) $\frac{x-15}{2x+7}$
- (j) $\frac{6x-22}{(x-3)(x-5)}$
- (k) $\frac{9x-3}{x^2-4}$
- (l) $\frac{2x^3+8x^2-23x-3}{2x(x+3)(x-3)}$
- (e) $\frac{9}{2x}$
- (f) $\frac{x-2}{3x^2(x-1)}$
- (g) $\frac{(x-1)(x+3)}{2}$
- (b) $\frac{1}{3(x+y)}$
- (c) 0, 16
- (d) 0, 064
- (d) 3^{-1}
- (e) 5^{-3}
- (b) x:7, y:-2, z:-8
- (c) x:-2, y:0, z:1
- (d) x:6, y:0, z:3

- (a) $|x - 2|$ (d) $|x + 3|$
 (b) $x - 2$ (e) $-x - 3$
 (c) $2 - x$ (f) $x + 3$
85. (a) $-2 \leq x$ (c) $x \in \mathbb{R}$
 (b) $x \leq -2$ (d) $x \leq \frac{3}{4}$
86. (a) $2xy\sqrt{3x}$ (e) $4x^2y\sqrt{5}$
 (b) $3x^2y^2\sqrt{3x}$ (f) $-9x^3y^2$
 (c) $4x^2y$ (g) $-5y^3\sqrt{5x}$
 (d) $-6x^4y^3$ (h) $-12y\sqrt{xy}$
87. (a) $\sqrt{2x^5y^7}$ (c) $-\sqrt{25x^3y^5}$
 (b) $\sqrt{45x^4y^{10}}$ (d) $-\sqrt{49x^4y^7}$
88. (a) $3\sqrt{5}$ (e) $15xy^5$
 (b) 10 (f) 4
 (c) 4 (g) -4
 (d) $3x^2y^5\sqrt{x}$
89. (a) $3\sqrt{3}$ (c) 2
 (b) 1 (d) 5
90. (a) 3 (e) 18
 (b) $7 + 2\sqrt{10}$ (f) $2\sqrt{50} + 14$
 (c) $9 - 2\sqrt{14}$ (g) $9x - 2\sqrt{x} + \frac{y}{9}$
 (d) 27
91. (a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (f) $\sqrt{3}$
 (b) $\sqrt{3}$ (g) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}$
 (c) $\sqrt{5-x}$ (h) $2 - \sqrt{5}$
 (d) $\sqrt{8} - \sqrt{3}$ (i) $4 - \sqrt{15}$
 (e) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ (j) $5 - 2\sqrt{6}$
92. -1518

Egyenletek, egyenlőtlenségek

93. (a) 3 (f) 1 (k) 1 (p) 5
 (b) 2 (g) -2 (l) 4 (q) -5
 (c) -2 (h) 23 (m) $\frac{1}{2}$ (r) 1
 (d) 1 (i) $\frac{5}{2}$ (n) 1 (s) -1
 (e) -3 (j) -1 (o) 4
94. (a) -5, 3 (b) 1, 2 (c) -9, -2
95. (a) $1 \leq x$ (i) $1 \leq x \leq 2$
 (b) $x < 9$ (j) $4 \leq x < 5$
 (c) $x \leq -1$ (k) $-1 \leq x \leq 1$
 (d) $3 < x$ (l) $3 < x$
 (e) $x \leq -7$ (m) $x < \frac{9}{2}$
 (f) $4 \leq x$ (n) $7 < x \leq 10$
 (g) $\frac{9}{4} < x$ (o) $\frac{3}{2} \leq x < 3$
 (h) $\frac{5}{22} \leq x$
96. (a) -2, 12 (f) 2
 (b) -2, -4 (g) -1, 1
 (c) $\emptyset$ (h) $0, \frac{7}{2}$
 (d) -4, 4 (i) 2
 (e) 1
97. (a) $-1 < x$ (d) $x \in \mathbb{R}$
 (b) $x \leq \frac{9}{2}$ (e) $] -\infty, 4] \cup [10, \infty[$
 (c) $-2 \leq x \leq -1$ (f) $-7 < x < -3$
98. (a) -3, 3 (f) -4, -2
 (b) -2, 2 (g) 2, 5
 (c) 0, -3 (h) -3, 2
 (d) $0, \frac{1}{7}$ (i) -8
 (e) -2, 8 (j) $\emptyset$

99. (a) -2 (c) 1, 5 (e) -8, 2 (g) $\emptyset$
(b) 3 (d) -4, 5 (f) $\emptyset$
100. (a) 2 (c) 2 (e) 0 (g) 0
(b) 1 (d) 2 (f) 1 (h) 2
101. (a) - - (d) - - (g) - 0 (j) - -
(b) - + (e) + + (h) 0 + (k) +
(c) - (f) - + (i) - + (l) $\emptyset$
102. (a) $x^2 - 4x + 3$ (d) $x^2 - 2x - 3$
(b) $x^2 + 2x$ (e) $x^2 - 6x - 27$
(c) $x^2 - 2x + 1$ (f) $x^2 + 6x + 9$
103. (a) $\frac{1 - \sqrt{41}}{2}, \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ (c) 0, 2, 5
(b) -4, -3, 3, 4 (d) -9, 0, 1
104. (a) 1, 2, 3 (c) 1, 3, 3
(b) -2, -1, 1 (d) 2
105. (a) $\mathbb{R} \setminus [-3, 3]$ (i) $]2, 4[$
(b) $[-2, 2]$ (j) $\mathbb{R} \setminus]-5, -2[$
(c) $\mathbb{R} \setminus]-5, 5[$ (k) $] - 1, 10[$
(d) $\mathbb{R} \setminus]-9, 9[$ (l) $\mathbb{R} \setminus]-7, 1[$
(e) $]0, 3[$ (m) $\mathbb{R} \setminus]-7, -3[$
(f) $\mathbb{R} \setminus]-9, 0[$ (n) $] - 4, -2[$
(g) 0 (o) $] - \infty, 1] \cup]3, 5]$
(h) $\mathbb{R} \setminus \{-8\}$ (p) $]1, 7[\setminus \{2\}$
106. (a) -3, 3 (e) -5, -3, 3, 5
(b) -9, -6, 6, 9 (f) $\mathbb{R} \setminus]1, 2[$
(c) $\emptyset$ (g) $[3, 5]$
(d) -2, 2
- 107.

- | | | |
|------|----------------------------------|-----------------------------------|
| | (a) $[-2, 6]$ | (b) $]5, 6[$ |
| 108. | (a) $[2, \infty[$ | (e) $\mathbb{R}$ |
| | (b) $[-4, \infty[$ | (f) $\mathbb{R}$ |
| | (c) $\left[\frac{5}{2}, \infty[$ | (g) $\mathbb{R} \setminus]1, 2[$ |
| | (d) $] - \infty, \frac{6}{5}]$ | (h) $[-1, 3]$ |
| 109. | (a) $x = 0, y = 2$ | (d) $y = 2 + 2x$ |
| | (b) $x = 1, y = -3$ | (e) $y = \frac{3}{2}x - 1$ |
| | (c) $x = 3, y = -2$ | (f) nincs megoldás |



II. RÉSZ

FELADATOK 11-12. OSZTÁLYOSOK RÉSZÉRE

SZÉCHENYI 



Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Függvényábrázolás

1. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Mi a legkisebb periódusa az alábbi függvényeknek?

- | | | |
|--|----------------------|---------------------|
| (a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ | (d) $2\cos(x + \pi)$ | (g) $\tan(x + \pi)$ |
| (b) $\cos(2x)$ | (e) $3\sin(x)$ | (h) $\cot(2x)$ |
| (c) $-2\sin(2x) + \pi$ | (f) $2\cos(4x)$ | |

2. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Hol metszik az alábbi függvények az y tengelyt?

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (a) 2^x | (d) 2^{-3x} |
| (b) 3^{x-3} | (e) 3^{4-x} |
| (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$ | (f) $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}$ |

3. Ábrázolja az alábbi függvényeket. Hol vannak értelmezve az alábbi függvények?

- | | |
|------------------|-----------------------|
| (a) $\log_2 x$ | (c) $\log_2 x^3$ |
| (b) $\log_3(3x)$ | (d) $\log_3(x + 4)^2$ |

4. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = \sin x$ függvényből úgy kapunk, hogy:

- (a) x tengely mentén toljuk balra 4 egységet
- (b) y tengely mentén toljuk felfelé 2 egységet
- (c) x tengely mentén toljuk balra 1 egységet és az y tengely mentén toljuk lefelé 3 egységet
- (d) tükrözzük az x tengelyre és az y tengely mentén toljuk felfelé 2 egységet
- (e) tükrözzük az y tengelyre és az x tengely mentén toljuk jobbra 1 egységet
- (f) alkalmazunk egy $\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre nézve

5. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = 3^x$ függvényből úgy kapunk, hogy:

- (a) x tengely mentén toljuk balra 1 egységet
- (b) y tengely mentén toljuk felfelé 4 egységet
- (c) x tengely mentén toljuk jobbra 2 egységet és az y tengely mentén toljuk felfelé 3 egységet

- (d) tükrözzük az x tengelyre
- (e) tükrözzük az y tengelyre
6. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a függvényt, melyet az $f(x) = \log_2 x$ függvényből úgy kapunk, hogy:
- (a) y tengely mentén toljuk felfelé 3 egységet
- (b) x tengely mentén toljuk jobbra 2 egységet
- (c) y tengely mentén felfelé 2 egységet és az x tengely mentén toljuk balra 4 egységet
- (d) tükrözzük az x tengelyre
- (e) tükrözzük az y tengelyre
- (f) alkalmazunk egy 3 arányú merőleges affinitást az x tengelyre nézve
7. Állapítsuk meg az alábbi függvények legbővebb valós értelmezési tartományát:
- | | |
|------------------------|----------------------------|
| (a) $\tan x$ | (e) $\log_2 \frac{1}{ x }$ |
| (b) $\cot(3x)$ | (f) $\log_3(x-3)^2$ |
| (c) $\frac{1}{\sin x}$ | (g) e^{-3x} |
| (d) $\log_4 x$ | (h) $2^{\frac{1}{x}}$ |
8. Állapítsuk meg az alábbi függvények értékkészletét, a függvény legbővebb valós értelmezési tartományán:
- | | |
|------------------------|------------------------------|
| (a) $\tan x$ | (d) $\frac{5^x + 5^{-x}}{2}$ |
| (b) $\frac{1}{\sin x}$ | (e) $\log_5 x$ |
| (c) $3^{\frac{1}{x}}$ | (f) $\log_2 x $ |
9. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitásuk szempontjából, a megadott, vagy a függvény legbővebb valós értelmezési tartományán:
- | | |
|--|------------------|
| (a) $\tan x$, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | (d) e^{-x^2} |
| (b) $\sin x$, ha $x \in [0, 2\pi]$ | (e) $\log_2 x$ |
| (c) e^{-x} | (f) $\log_3 x $ |
10. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket korlátosságuk szempontjából, a függvény legbővebb valós értelmezési tartományán:

- | | | |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| (a) $\cos x$ | (d) 2^x | (g) $e^x + e^{-x}$ |
| (b) $\tan x$ | (e) $2^{-\frac{1}{x}}$ | (h) $\log_3 x$ |
| (c) $\frac{1}{\sin x}$ | (f) $e^{\ln x}$ | (i) $\log_3 \frac{1}{x}$ |

11. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértéke, és ha van, akkor hol és milyen típusú. Dolgozzunk a függvények legbővebb valós értelmezési tartományain:

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| (a) $\cos(3x)$ | (d) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ |
| (b) $\frac{1}{\sin x}$ | (e) $\log_3(5 - x)^2$ |
| (c) 2^{-x^2} | (f) $\ln 3 - x $ |

12. Egy növény egyik napról a másikról képes megduplázni az általa beborított területet. Írjuk fel a beborított területet az eltelt napok számának függvényében, ha kezdetben 4 m^2 borít be. Hány nap múlva fog betéríteni egy 60 m^2 -es területet?
13. A Richter skálán egy egységnyi növekedés 10-szer olyan nagy földrengést jelent. A földrengés energiáját egy $\frac{3}{2}$ -es hatvány segítségével számoljuk. Az energia hányszorosra szabadul fel egy 6-os erősségű földrengésnél egy 5-ös erősségűhöz képest? És egy 7-es erősségnél?
14. Egy bankba 1000000 Ft-ot helyezünk letétbe 3%-os kamatra. Írjuk fel a bankban lévő pénz az eltelt évek függvényében, ha évente tőkésítünk. Mikor éri el a pénzösszeg a 2000000 Ft-ot?
15. Írjuk fel a Big Ban 3,5 méter hosszú nagyműtató árnyékának hosszát az eltelt idő függvényében, ha a mérést délben kezdjük? (Tegyük fel, hogy a fény mindig a 12 óra felől érkezik)
16. Tekintsük az Eiffel tornyot 300m magasnak. Gyalogosan közeledve írjuk fel a távolságunkat a torony látószögének függvényében. Milyen messze vagyunk a toronytól, ha a látószög éppen 36° -os?
17. Egy vázába rakott tulipán naponta 6%-al lesz hosszabb. Írjuk fel a tulipán szárának a hosszát az eltelt napok függvényében, ha kezdetben 20cm hosszú volt. Milyen hosszú szárat dobunk ki, ha a tulipán 8 nap alatt hervad el? Mikorra éri el az eredeti hossz 1,5-szeresét?
18. Egy gyár minden évben 5%-al emeli a kapacitását. Írjuk fel a kapacitást az elmúlt idő függvényében. Mennyi idő múlva éri el a 40%-os növekedést a mostani állapothoz képest?

19. Egy bank a berakott összegre adott évi 3%-os kamatot minden hónap végén arányosan ráhelyezi a számlánkra, hogy aztán az kamatozzon tovább. Írjuk fel a számlán lévő összeget az eltelt hónapok függvényében. Mekkora így a tényleges éves kamat?
20. Egy átlagos papírlap vastagágga 0,1mm. Hányszor kellene (elméletileg) félbehajtani a lapot, hogy a keletkező vastagság elérjen a Holdig? (A Föld Hold átlagos távolsága 384400km)
21. Egy űrhajó száll fel a Földről annak keringési síkjára merőlegesen. Írjuk fel a földtől mért távolságot a Nap és a Föld által meghatározott szakasz látószögének függvényében. Egy parsec az a távolság, amikor ez a látószög 1 ívmásodperc. Fejezzük ki az 1 parsecet kilométerben. (A Föld nap távolság körülbelül 150 millió km)

Sorozatok

22. Határozzuk meg az alábbi számtani sorozatok differenciáját és ötödik tagját:

(a) $a_1 = 2, a_2 = 3$

(d) $a_3 = 1, a_7 = 9$

(b) $a_1 = 3, a_4 = 9$

(e) $a_7 = 21, a_{10} = 6$

(c) $a_2 = -2, a_4 = -8$

23. Határozzuk meg az alábbi számtani sorozatok első öt tagját:

(a) $a_n = n + 3$

(c) $a_n = 2n + 4$

(b) $a_n = 3n$

(d) $a_n = \frac{n-4}{3}$

24. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok első három tagját:

(a) $a_1 = 1, q = 3$

(c) $a_2 = 3, a_4 = 12$

(b) $a_5 = 8, q = 2$

(d) $a_4 = 10, q = 0,1$

25. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok hányadosát és ötödik tagját:

(a) $a_3 = 2, a_9 = 2$

(c) $a_2 = 4, a_7 = -128$

(b) $a_1 = 1, a_3 = 9$

(d) $a_7 = -\frac{1}{2}, a_{10} = 32$

26. Határozzuk meg az alábbi számtani sorozatok első tíz tagjának összegét:

(a) $a_1 = 3, d = 2$

(d) $a_2 = 1, a_8 = 4$

(b) $a_1 = 5, a_2 = 4$

(e) $a_{10} = 111, d = -11$

(c) $a_2 = 7, a_3 = 9$

(f) $a_{100} = 75, a_{90} = 60$

27. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok első nyolc tagjának összegét:

(a) $a_1 = 5, q = 1$

(d) $a_2 = 5, a_5 = 625$

(b) $a_1 = 3, q = -2$

(e) $a_1 = 729, a_8 = -\frac{1}{3}$

(c) $a_2 = 4, a_3 = 6$

(f) $a_4 = 64, a_2 = 4$

28. Egy 31 napos edzéstervben az első napon 30 felülés szerepel. Minden nappal növeljük a felülések számát 5-el egészen a 16. napig, majd ugyanilyen ütemben csökkentjük a tréning végéig. Összesen hány felülést csinálunk a 31 nap során?

29. Egy vívóturnán 256 induló van. A lebonyolítás egyenes kieséses, azaz egy-egy asszuó vesztese kiesik, győztese továbbjut a következő fordulóba. Hány párvialdra van szükség a győztes kihirdetéséig, ha a döntő előtt lejátszák a bronzmérkőzést is?

30. A legenda szerint a sakk feltalálója jutalmul azt kérte az uralkodótól, hogy a tábla első mezőjére tegyenek 1 szem búzát, majd minden további mezőre kétszer annyi szemet, mint az előzőre. Összesen hány szem búzát kell ehhez felhasználnunk?

31. Az origóból az x tengely irányába megyünk 100 egységet, majd minden további lépésben balra fordulunk 90° -ot és az előző lépéshossz felét tesszük meg. Írjuk fel a 20. lépés után a tartózkodási helyünk x és y koordinátáját. Mi történhet végtelen sok lépés után?

32. Egy cég minden hónap végén ad az egyik középvezetőjének 2500 Ft béremelést egész évben. Mennyit keresett a dolgozó, ha az év elején 180000 Ft volt a jövedelme? Mekkora volt a fizetése az év végén?

33. Egy család minden évben 1000000 Ft-ot rak be egy folyószámlára, ami nem kamatozik. Sajnos a pénz romlása miatt évente 5%-al csökken a megtakarítás értéke. Mennyi lesz a számlán lévő pénzösszeg valós értéke 10 év után?

34. Adjuk meg az első 200 pozitív egész szám összegét.

35. Egy megtakarítási számlára minden hónapban 20000 Ft-ot fizetünk. A számla havi kamatozású és évi 6%-ot biztosít. Mekkora lesz a rendelkezésre álló összeg a 4 éves futamidő végére?

36. Egy számtani sorozatban az első három tag összege megadja a negyedik tagot. Határozzuk meg a sorozat első elemét és differenciáját, ha annak első hat tagjának összege 30.
37. Egy számtani sorozat első, hetedik és kilencedik tagjának összege 17, míg negyedik és nyolcadik tagjának összege 10. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a differenciáját.
38. Egy számtani sorozat hetedik eleme 18 és tizedik tagja épp a második tagjának háromszorosa. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a differenciáját.
39. Egy számtani sorozat első két tagjának szorzata éppen a 6. tag, melyet ha a 3. taggal osztunk, 2-t kapunk. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a differenciáját.
40. Egy mértani sorozat első és második elemének összege 8, míg második és harmadik tagjának összege 24. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.
41. Egy növekvő mértani sorozat első három tagjának összege 13, első és harmadik elemének szorzata pedig 9. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.

Koordináta-geometria

42. Ábrázolja a következő pontokat A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben:
- | | |
|----------------|----------------|
| (a) $A(3, 4)$ | (c) $C(-1, 2)$ |
| (b) $B(-5, 0)$ | (d) $D(4, -3)$ |
43. Állapítsa meg, hogy az alábbi pontok a koordinátarendszer melyik síknegyedébe esnek:
- | | |
|-----------------|--------------------|
| (a) $A(1, 1)$ | (d) $D(-3, 9)$ |
| (b) $B(-3, -2)$ | (e) $E(e^2, - e)$ |
| (c) $C(4, -5)$ | (f) $F(f^3, f^2)$ |
44. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi négy pont: $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-3, 9)$, $D(5, -2)$. Írjuk fel az alábbi szakaszok felezőpontját:
- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (a) AB | (b) AD | (c) BC | (d) CA |
|----------|----------|----------|----------|
45. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi négy pont: $A(2, 9)$, $B(-5, 1)$, $C(4, -8)$, $D(-4, 2)$. Írjuk fel az alábbi vektorok koordinátáit:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| (a) $\overrightarrow{AB}$ | (c) $\overrightarrow{CD}$ | (e) $\overrightarrow{DB}$ |
| (b) $\overrightarrow{BA}$ | (d) $\overrightarrow{AC}$ | (f) $\overrightarrow{AD}$ |

46. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi két pont: $A(1, 3)$, $B(-2, 6)$. Írjuk fel az alábbi pontok koordinátáit:

- (a) AB szakasz felezőpontja
- (b) AB szakasz A -hoz közelebbi harmadolópontja
- (c) AB szakasz B -hez közelebbi harmadolópontja

47. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi három pont: $A(1, 4)$, $B(2, -5)$, $C(-3, 1)$. Írjuk fel az $ABC\triangle$ súlypontjának koordinátáit.

48. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi három pont: $A(2, -5)$, $B(4, 1)$, $C(0, 4)$. Írjuk fel az AB szakasz D felezőpontját, majd a CD szakasz D -hez közelebbi harmadolópontját.

49. Írjuk fel az alábbi egyenesek irányvektoros egyenletét:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $P(0, 0)$, $\mathbf{v}(1, 1)$ | (d) $P(1, 2)$, $\mathbf{v}(-3, 0)$ |
| (b) $P(0, 1)$, $\mathbf{v}(-3, 1)$ | (e) $P(-4, 1)$, $\mathbf{v}(0, 1)$ |
| (c) $P(-3, 1)$, $\mathbf{v}(2, 3)$ | (f) $P(2, -3)$, $\mathbf{v}(-2, 1)$ |

50. Írjuk fel az alábbi két ponton átmenő egyenesek irányvektoros egyenletét:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| (a) $P(2, 2)$, $Q(3, 3)$ | (d) $P(5, 1)$, $Q(-3, 3)$ |
| (b) $P(-1, 3)$, $Q(0, 3)$ | (e) $P(1, -3)$, $Q(-5, -2)$ |
| (c) $P(1, 4)$, $Q(-3, -1)$ | |

51. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi háromszög: $A(2, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(-6, 3)$. Írjuk fel az alábbi egyenesek irányvektoros egyenletét:

- (a) AB oldalegyenes
- (b) A csúcshoz tartozó súlyvonal
- (c) AC oldalegyenes
- (d) B csúcshoz tartozó súlyvonal

52. Írjuk fel az alábbi egyenesek normálvektoros egyenletét:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| (a) $P(0, 0), \mathbf{n}(1, 1)$ | (d) $P(0, 3), \mathbf{n}(-2, 1)$ |
| (b) $P(1, -3), \mathbf{n}(-2, 1)$ | (e) $P(1, -4), \mathbf{n}(3, -1)$ |
| (c) $P(2, -9), \mathbf{n}(1, 0)$ | (f) $P(-3, -5), \mathbf{n}(0, -7)$ |

53. Írjuk fel az alábbi két pont szakaszfelező merőleges egyenesének normálvektoros egyenletét:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) $P(2, 0), Q(0, 4)$ | (d) $P(-7, 1), Q(-3, 11)$ |
| (b) $P(-3, 5), Q(-1, -7)$ | (e) $P(2, -3), Q(-6, -3)$ |
| (c) $P(4, 7), Q(4, -3)$ | |

54. Legyen a koordinátarendszerben adott az alábbi háromszög: $A(2, 3), B(-4, 1), C(6, -7)$. Írjuk fel az alábbi egyenesek normálvektoros egyenletét:

- (a) AB oldalfelező merőleges
- (b) BC oldalfelező merőleges
- (c) a oldalhoz tartozó magasság
- (d) c oldalhoz tartozó magasság

55. Állapítsuk meg az alábbi egyenesek egy pontját, továbbá irányvektorát vagy normálvektorát:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (a) $x + y = 3$ | (d) $2x - 5y = 24$ |
| (b) $2y - x = 4$ | (e) $-x - 13y = 4$ |
| (c) $4x - 3y = -4$ | (f) $4x + 43y = 47$ |

56. Döntsük el, hogy az alábbi egyenesek párhuzamosak-e:

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| (a) $x + 3y = 2$ | (b) $2x - y = 0$ | (c) $6x - 2y = 1$ |
| $2x - 6y = 1$ | $4x - 2y = 9$ | $3y - 9x = 2$ |

57. Döntsük el, hogy az alábbi egyenesek merőlegesek-e:

- | | | |
|------------------|-----------------|-------------------|
| (a) $2x + y = 4$ | (b) $x + y = 2$ | (c) $-x + 4y = 4$ |
| $3x - 6y = 1$ | $2x + 2y = 3$ | $2x + y = 3$ |

58. Keressük meg az alábbi egyenesek metszéspontját:

(a) $x - 2y = 1$

$2x + y = 2$

(b) $x - 3y = -1$

$2y + x = 4$

(c) $x - 2y = 4$

$3x - 6y = 5$

(d) $2x + y = 1$

$3y - x = 10$

59. Egy háromszög $A(2, 1)$ csúcsánál lévő belső szögfelező egyenlete $2x + y = 5$. Írjuk fel a külső szögfelező egyenletét.

60. Állítsunk merőlegest a megadott egyenesekre a megadott pontokon át:

(a) $2x - y = 2$, $P(1, 3)$

(c) $3x + 2y = 10$, $P(1, 4)$

(b) $x - y = 3$, $P(4, 1)$

(d) $2x - 5y = 4$, $P(0, 3)$

61. Keressük meg a megadott ponthoz legközelebb lévő pontot a megadott egyenesen:

(a) $4x - y = 3$, $P(-3, 2)$

(c) $5x - 12 = 3y$, $P(-2, 4)$

(b) $2x + 3y = 3$, $P(2, 4)$

(d) $x - 5y = 7$, $P(3, 4)$

62. Keressük meg az alábbi egyenesek koordinátatengelyekkel vett metszetit:

(a) $x + y = 5$

(c) $4x - 5y = 40$

(b) $3x - y = 24$

(d) $3y + 2x = 18$

63. Mekkora azoknak a háromszögnek a területe, amelynek oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az alábbi egyenes:

(a) $2x - 4y = 8$

(c) $2y - 5x = 15$

(b) $y = 3x - 15$

(d) $4x + 4 = 24y$

64. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(3, 7)$ ponton és a $2x - 4y = 14$, $x + 5y + 14 = 0$ egyenesek metszéspontján.

65. Határozzuk meg az $y = 2x + b$ egyenletű egyenesben b értékét úgy, hogy az egyenes átmenjen a $P(3, -1)$ ponton.

66. Állapítsuk meg az alábbi vektorok hosszát:

(a) $(1, 2)$

(b) $(3, 4)$

(c) $(5, -12)$

(e) $(-7, 3)$

(d) $(-3, 9)$

(f) $(7, -24)$

67. Vegyük az alábbi vektorok skaláris szorzatát

(a) $\mathbf{u}(4, 1), \mathbf{v}(1, 2)$

(c) $\mathbf{u}(2, 1), \mathbf{v}(-4, -3)$

(b) $\mathbf{u}(3, -1), \mathbf{v}(2, 6)$

(d) $\mathbf{u}(5, -9), \mathbf{v}(-2, -1)$

68. Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok hegyes-, derék-, vagy tompaszöget zárnak-e be:

(a) $\mathbf{u}(3, 2), \mathbf{v}(-1, 2)$

(c) $\mathbf{u}(4, 2), \mathbf{v}(-3, 6)$

(b) $\mathbf{u}(2, -5), \mathbf{v}(3, -1)$

(d) $\mathbf{u}(-1, 3), \mathbf{v}(9, 0)$

69. Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok szögét:

(a) $\mathbf{u}(3, -1), \mathbf{v}(2, 1)$

(c) $\mathbf{u}(3, -7), \mathbf{v}(-1, 2)$

(b) $\mathbf{u}(2, 1), \mathbf{v}(-4, 8)$

(d) $\mathbf{u}(4, 1), \mathbf{v}(2, 3)$

70. Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenesek hajlásszögét:

(a) $x - y = 2, x = 5$

(c) $x - 2y = 7, 4x + 2y = 5$

(b) $3x - 2y = 1, 2x + y = 3$

(d) $x - 7 = y, \sqrt{3}x + y = 2$

71. Számítsuk ki az alábbi két pont távolságát

(a) $P(-2, 1), Q(2, 4)$

(c) $P(-1, 3), Q(4, 1)$

(b) $P(1, -7), Q(6, 5)$

(d) $P(3, -9), Q(2, -7)$

72. Határozzuk meg az $ABC\triangle$ háromszög körülírtó körének középpontját és sugarát, ha $A(-2, 1)$, $B(7, 3)$ és $C(-1, 7)$.

73. Határozzuk meg az $ABC\triangle$ háromszög körülírtó körének középpontját és sugarát, ha $A(6, 0)$, $B(2, 8)$ és $C(-12, -6)$.

74. Határozzuk meg az alábbi háromszögek területét:

(a) $A(5, 1), B(-3, 1), C(4, 9)$

(b) $A(-2, 2), B(6, 0), C(1, 5)$

(c) $A(3, -2)$, $B(7, 6)$, $C(5, 12)$

75. Írjuk fel annak a körnek az egész együtthatós egyenletét, melynek

- (a) középpontja a $(0,0)$ és sugara 2 egység
- (b) középpontja a $(1,2)$ és sugara 1 egység
- (c) középpontja a $(-2,1)$ és sugara 5 egység
- (d) középpontja a $(3,-5)$ és sugara $\sqrt{11}$ egység
- (e) középpontja a $(-1,3)$ és sugara $\frac{3}{5}$ egység
- (f) középpontja a (u,v) és sugara r egysége.

76. Írjuk fel annak a 3 sugarú körnek az egyenletét, amely

- (a) illeszkedik az x tengely pozitív felére és érinti az y tengelyt
- (b) illeszkedik az y tengely negatív felére és érinti az x tengelyt

77. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, melynek

- (a) középpontja az $O(2,1)$ és pontja a $P(5,5)$
- (b) középpontja az $O(-2,3)$ és pontja a $P(-2,9)$
- (c) egy átmérőjét az $A(4,7)$ és $B(-2,-1)$ pontok határozzák meg
- (d) egy átmérőjét az $A(-1,7)$ és $B(2,11)$ pontok határozzák meg
- (e) középpontja az $O(u,v)$ és áthalad az origón
- (f) középpontja az x tengelyre esik és átmegy a $P(-2,3)$ és $Q(8,7)$ pontokon
- (g) sugara 4 egység és érint mindkét koordinátatengely pozitív felét
- (h) középpontja az $O(1,4)$ és érint az $x - 3y + 1 = 0$ egyenest

78. Állapítsuk meg az alábbi egyenletekkel adott körök középpontját és sugarát:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| (a) $x^2 + y^2 = 16$ | (c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ |
| (b) $x^2 - 2x + y^2 = 15$ | (d) $x^2 - 4x + y^2 + 2x = 44$ |

79. Állapítsuk meg, hogy az alábbi pontok az $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 23$ egyenletű körön, azon belül, vagy kívül helyezkedik-e el:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| (a) $A(0,0)$ | (b) $B(2,3)$ | (c) $C(1,4)$ | (d) $D(-1,0)$ |
|--------------|--------------|--------------|---------------|

80. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az alábbi köröket:

(a) $x^2 + y^2 = 1$

(d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$

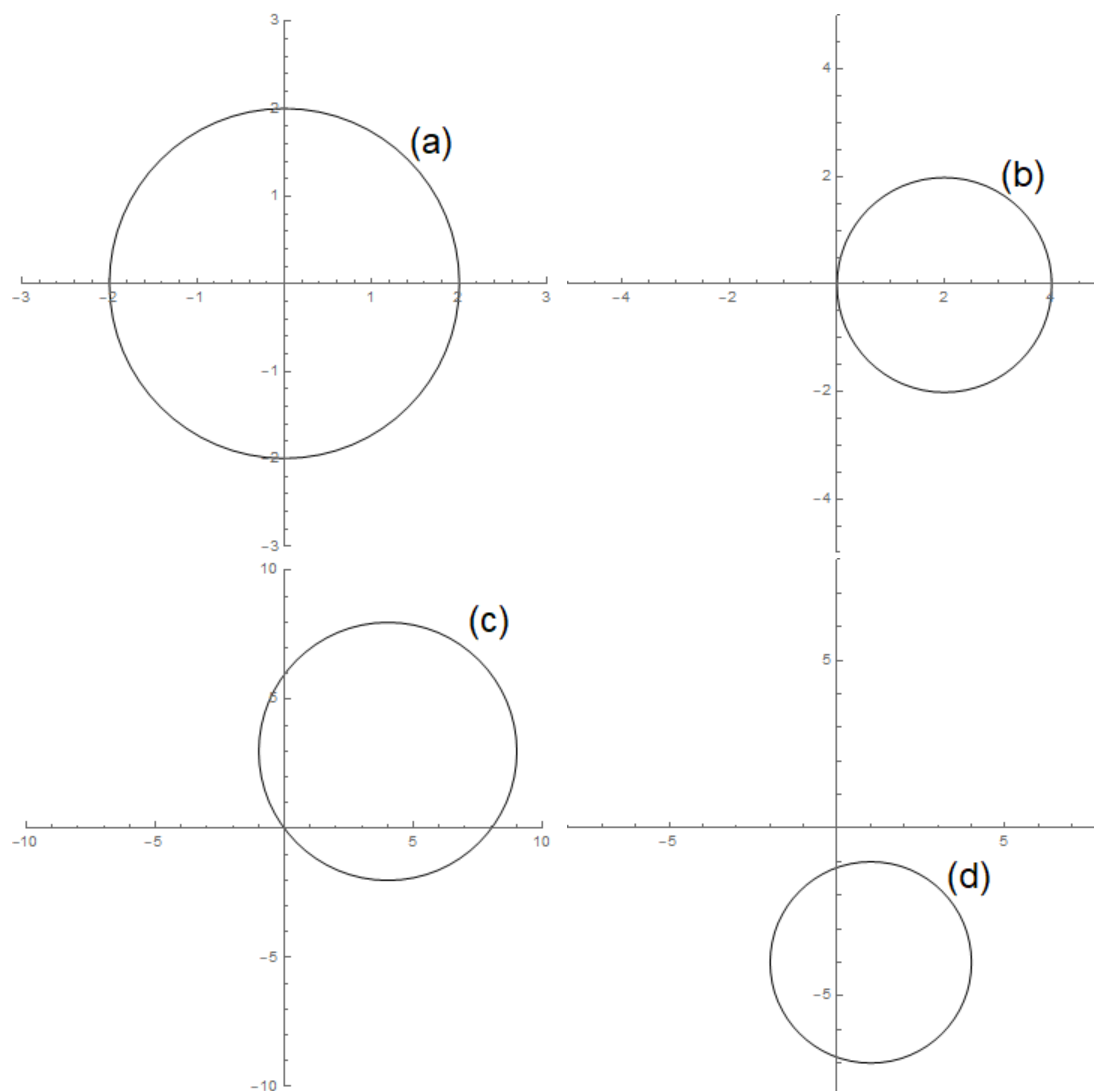
(b) $x^2 + y^2 = 25$

(e) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$

(c) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(f) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

81. Olvassuk le a koordináta-rendszerbeli ábráról a kör egyenletét:



82. Határozzuk meg a háromszög kör írható körének egyenletét, ha oldalegyenesei: $x - y = 0$, $x + 2y + 6 = 0$ és $3x - y = 10$.

83. Határozzuk meg az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ egyenletű kör és az $x - 2y + 10 = 0$ egyenletű egyenes közös pontjait.

84. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$ egyenletű kör origóhoz legközelebb eső pontját.

85. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 3 = 0$ egyenletű körök közös húrájának egyenletét és adjuk meg a körök metszéspontjait.

Algebra

n -edik gyök

86. Végezzük el a gyökkvonásokat!

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $\sqrt[3]{8}$; | (i) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; | (p) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; |
| (b) $\sqrt[3]{125}$; | (j) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,027}}$; | (q) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; |
| (c) $\sqrt[4]{16}$; | (k) $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$; | (r) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$; |
| (d) $\sqrt[4]{0,0625}$; | (l) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$; | (s) $\sqrt[5]{\frac{100000}{243}}$; |
| (e) $\sqrt[5]{32}$; | (m) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; | (t) $\sqrt[3]{\frac{0,001}{-8}}$; |
| (f) $\sqrt[3]{-1000}$; | (n) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; | (u) $\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$. |
| (g) $\sqrt[8]{1}$; | (o) $\sqrt[3]{\frac{0,001}{125}}$; | |
| (h) $\sqrt[11]{-1}$; | | |

87. A változók mely lehetséges értékeire áll fenn az egyenlőség?

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| (a) $\sqrt[3]{a^3} = a$; | (c) $\sqrt[6]{a^6} = a $; | (e) $\sqrt[5]{a^5} = -a$; |
| (b) $\sqrt[2]{a^2} = a$; | (d) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; | (f) $\sqrt[5]{-a^5} = a $; |

88. Hozzuk egyszerűbb alakra, emeljünk ki a gyökjel alól, amit lehet!

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| (a) $\sqrt[3]{81}$; | (f) $\sqrt[4]{243}$; | (k) $\sqrt[3]{8a^3}$; |
| (b) $\sqrt[3]{625}$; | (g) $\sqrt[3]{-\frac{81}{125}}$; | (l) $\sqrt[3]{27a^4}$; |
| (c) $\sqrt[3]{100000}$; | (h) $\sqrt[3]{\frac{16}{5}}$; | (m) $\sqrt[3]{125a^4}$; |
| (d) $\sqrt[3]{-0,0625}$; | (i) $\sqrt[3]{\frac{10000}{243}}$; | (n) $\sqrt[4]{32a^5b^4}$; |
| (e) $\sqrt[4]{32}$; | (j) $\sqrt[4]{\frac{32}{100000}}$; | (o) $\sqrt[5]{243a^7b^6}$. |

89. Hozzuk egyszerűbb alakra, vigyük a gyökjel alá!

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| (a) $3 \cdot \sqrt[3]{7}$; | (f) $10^2 \sqrt[3]{10}$; | (k) $\frac{a^2}{b} \sqrt[3]{\frac{b^3}{a^6}}$; |
| (b) $7 \cdot \sqrt[3]{5^2}$; | (g) $a^2 \sqrt[3]{2b}$; | (l) $\frac{2}{7a} \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; |
| (c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{7}$; | (h) $4a \sqrt[4]{5a^2}$; | (m) $-\frac{1}{a} \sqrt[5]{\frac{a^4}{7}}$. |
| (d) $5 \sqrt[3]{5}$; | (i) $5a^3 \sqrt[3]{\frac{b}{a^4}}$; | |
| (e) $9 \sqrt[3]{9}$; | (j) $6ab^2 \sqrt[4]{\frac{a}{b^4}}$; | |

90. Végezzük el a következő műveleteket!

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$; | (h) $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{27}$; | (o) $\sqrt[3]{74} \cdot \sqrt[3]{72}$; |
| (b) $\sqrt[4]{10000 \cdot 16}$; | (i) $\sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}$; | (p) $\sqrt[4]{3^2 a^4} \cdot \sqrt[4]{3^2 a^8}$; |
| (c) $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$; | (j) $\sqrt[5]{100000 \cdot \frac{1}{243}}$; | (q) $\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[3]{(6^3 a)^2}$; |
| (d) $\sqrt[3]{1000 \cdot 8}$; | (k) $\sqrt[3]{\frac{4}{1000} \cdot \frac{2}{125}}$; | (r) $\sqrt[5]{-2a^4} \cdot \sqrt[5]{2^4 a}$; |
| (e) $\sqrt[4]{81 \cdot 0,0625}$; | (l) $\sqrt[3]{\frac{4}{0,001} \cdot \frac{2}{0,027}}$; | (s) $\sqrt[3]{\frac{11^2}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{11}{27a^5}}$; |
| (f) $\sqrt[5]{243 \cdot 243}$; | (m) $\sqrt[5]{-\frac{32}{9} \cdot \frac{243}{27}}$; | (t) $\sqrt[4]{\frac{a^5}{7^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{7^3}{a}}$; |
| (g) $\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{8^2}$; | (n) $\sqrt[3]{9^4} \cdot \sqrt[3]{9^2}$; | (u) $\sqrt[7]{-(9a)^5} \cdot \sqrt[7]{\frac{9^2 a^2}{b^{14}}}$. |

91. Végezzük el a következő műveleteket!

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{10000}$; | (g) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; | (l) $\sqrt[3]{27a^4} : \sqrt[3]{a}$; |
| (b) $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{0,027}$; | (h) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} : \sqrt[3]{\frac{0,001}{125}}$; | (m) $\sqrt[4]{5^2 a^6} : \sqrt[4]{5a^2}$; |
| (c) $\sqrt[5]{32} : \sqrt[5]{243}$; | (i) $\sqrt[5]{-\frac{243}{32}} : \sqrt[5]{243}$; | (n) $\sqrt[3]{\frac{8a}{3}} : \sqrt[6]{\frac{a^2}{3^2}}$; |
| (d) $\sqrt[4]{256} : \sqrt[4]{0,0625}$; | (j) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} : \sqrt[4]{\frac{81^2}{16^2}}$; | (o) $\sqrt[4]{\frac{16a^2}{b^5}} : \sqrt[4]{a^2 b^3}$. |
| (e) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{125}$; | (k) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}} : \sqrt[4]{\frac{625^2}{81^2}}$; | |
| (f) $\sqrt[5]{243} : \sqrt[5]{32}$; | | |

92. Írjuk fel egyszerűbb alakban!

- | | | |
|----------------------------|--|---|
| (a) $(\sqrt[3]{3})^3$; | (e) $(5\sqrt[6]{4^3})^2$; | (h) $\left(\frac{7}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{7^2}}\right)^2$; |
| (b) $(\sqrt[4]{7^2})^2$; | (f) $(2\sqrt[3]{2^2})^3$; | (i) $\left(\frac{a^2}{2}\sqrt[5]{\frac{2}{a^3}}\right)^1 \cdot 5$. |
| (c) $(\sqrt[3]{-3^2})^6$; | (g) $\left(2a\sqrt[4]{\frac{3^3}{a}}\right)^2$; | |
| (d) $(\sqrt[3]{-4^2})^6$; | | |

93. Írjuk fel egyszerűbben, egyetlen gyökjellel!

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) $\sqrt{\sqrt[3]{11}}$; | (f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6^2 a^2}}$; | (k) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$; |
| (b) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$; | (g) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{11a^3}}$; | (l) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; |
| (c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{12}}$; | (h) $\sqrt[3]{a\sqrt{10a}}$; | (m) $\sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{a}}$; |
| (d) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{7}}$; | (i) $\sqrt[5]{6a\sqrt[3]{a^2 b}}$; | (n) $\sqrt[5]{\frac{a^2}{6b^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. |
| (e) $\sqrt[3]{\sqrt{5a}}$; | (j) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{6}$; | |

94. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét!

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad \sqrt[3]{\frac{4}{4^2}}; & \text{(d)} \quad \sqrt[5]{\frac{10}{10}}; & \text{(f)} \quad \sqrt[5]{\frac{a+7}{(a+7)^3}}; \\
\text{(b)} \quad \sqrt[4]{\frac{3}{3^3}}; & & \\
\text{(c)} \quad \sqrt[7]{\frac{2}{2^3}}; & \text{(e)} \quad \sqrt[3]{\frac{a+11}{a+11}}; & \text{(g)} \quad \sqrt[3]{\frac{a-5}{(a-5)^4}}.
\end{array}$$

Törtekitevőjű hatványok

95. Számítsa ki a következő kifejezések értékét!

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad 25^{\frac{3}{2}}; & \text{(g)} \quad 1000^{\frac{6}{3}}; & \text{(m)} \quad \left(\frac{8}{0,001}\right)^{\frac{2}{3}}; \\
\text{(b)} \quad 49^{\frac{5}{2}}; & \text{(h)} \quad 0,001^{\frac{1}{3}}; & \\
\text{(c)} \quad 100^{\frac{5}{2}}; & \text{(i)} \quad 16^{\frac{3}{4}}; & \text{(n)} \quad \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{4}{3}}; \\
\text{(d)} \quad 81^{-\frac{3}{4}}; & \text{(j)} \quad 256^{-\frac{2}{4}}; & \text{(o)} \quad \left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{3}{4}}; \\
\text{(e)} \quad 27^{\frac{2}{3}}; & \text{(k)} \quad 243^{\frac{2}{5}}; & \\
\text{(f)} \quad 125^{\frac{2}{3}}; & \text{(l)} \quad 32^{-\frac{3}{5}}; & \text{(p)} \quad \left(\frac{32}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}}.
\end{array}$$

96. Írjuk fel törtekitevővel a következő kifejezéseket!

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad \sqrt[4]{a^2}; & \text{(e)} \quad \sqrt{a^3\sqrt{a}}; & \text{(i)} \quad \sqrt[3]{2a\sqrt{8a}}; \\
\text{(b)} \quad \sqrt[2]{8a}; & \text{(f)} \quad \sqrt[4]{a^3\sqrt{ab}}; & \text{(j)} \quad \sqrt[4]{8a\sqrt{ab}}. \\
\text{(c)} \quad \sqrt[3]{ab^3}; & \text{(g)} \quad \sqrt[3]{a^4\sqrt{ab}}; & \\
\text{(d)} \quad \sqrt[8]{a^4b^2}; & \text{(h)} \quad \sqrt[5]{a^5\sqrt{b}}; &
\end{array}$$

97. Írjuk fel törtekitevővel a következő kifejezéseket!

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad \sqrt[5]{3}; & \text{(f)} \quad \sqrt[6]{a^7b^4}; & \text{(k)} \quad \sqrt[7]{(a^{3\cdot 7}b^{2\cdot 7})}; \\
\text{(b)} \quad \sqrt[5]{5^3}; & \text{(g)} \quad \sqrt[9]{(a+b)^2}; & \text{(l)} \quad \sqrt[4]{a^7\sqrt{ab^2}}; \\
\text{(c)} \quad \sqrt[7]{a^5}; & \text{(h)} \quad \sqrt[11]{(a+b^6)}; & \text{(m)} \quad \sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^3b}}; \\
\text{(d)} \quad \sqrt[2]{a^9}; & \text{(i)} \quad \sqrt[12]{(ab^12)}; & \text{(n)} \quad \sqrt[2]{ab^3\sqrt[4]{\frac{b}{a^2}}}. \\
\text{(e)} \quad \sqrt[4]{2a^11}; & \text{(j)} \quad \sqrt[7]{(a^{3\cdot 7}b^{2\cdot 7})}; &
\end{array}$$

98. Írjuk fel egy gyökjellel a következő hatványokat!

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad a^{\frac{2}{3}}; & \text{(d)} \quad a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{10}}; & \text{(g)} \quad a^{\frac{6}{7}}b^{-\frac{7}{6}}. \\
\text{(b)} \quad a^{\frac{7}{14}}; & \text{(e)} \quad 3^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{3}{2}}; & \\
\text{(c)} \quad 2^{\frac{3}{4}}a^{\frac{3}{4}}; & \text{(f)} \quad a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{5}{4}}; &
\end{array}$$

99. Írjuk fel egy gyökjellel a következő hatványokat!

- | | | |
|------------------------|---|--|
| (a) $4^{\frac{2}{3}};$ | (d) $2^{\frac{7}{3}}3^{\frac{7}{3}};$ | (g) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{5}};$ |
| (b) $7^{\frac{5}{6}};$ | (e) $a^{\frac{9}{2}}b^{\frac{3}{4}};$ | (h) $a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{7}{8}};$ |
| (c) $a^{\frac{4}{7}};$ | (f) $a^{\frac{10}{3}}a^{-\frac{4}{9}};$ | (i) $a^{\frac{2}{8}}b^{-\frac{5}{3}}.$ |

100. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- | | |
|---|---|
| (a) $a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{7}{2}};$ | (h) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{3}}a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{4}{3}};$ |
| (b) $a^{\frac{5}{2}}a^{\frac{5}{3}};$ | (i) $a^{\frac{6}{5}}b^{-\frac{5}{6}}a^{-\frac{6}{5}}b^{\frac{5}{6}};$ |
| (c) $a^{-\frac{7}{9}}a^{\frac{9}{5}};$ | (j) $a^{\frac{3}{7}}b^{\frac{7}{3}}a^{-\frac{7}{3}}b^{\frac{3}{7}};$ |
| (d) $a^{\frac{11}{4}}a^{-\frac{7}{8}};$ | (k) $a^{\frac{1}{7}}b^{\frac{9}{3}}a^7b^{-\frac{7}{3}};$ |
| (e) $a^{\frac{1}{11}}a^{10};$ | (l) $a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{7}{2}}b^{-\frac{2}{3}};$ |
| (f) $a^{\frac{1}{5}}a^2;$ | (m) $\left(a^{\frac{9}{2}} - b^{\frac{9}{2}}\right)\left(a^{\frac{9}{2}} + b^{\frac{9}{2}}\right).$ |
| (g) $a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}};$ | |

101. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- | | |
|--|--|
| (a) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3;$ | (i) $\left(a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{3}};$ |
| (b) $\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{-5};$ | (j) $\left(\frac{81a^4}{36b^2}\right)^{\frac{1}{2}};$ |
| (c) $\left(a^{-\frac{1}{7}}\right)^3;$ | (k) $\left(\frac{4a^8}{49b^6}\right)^{-\frac{1}{2}};$ |
| (d) $\left(a^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{6}{5}};$ | (l) $\left(\frac{a^3}{b^3}\right)^{\frac{7}{3}};$ |
| (e) $\left(a^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{7}{5}};$ | (m) $\left(\frac{a^2}{b^7}\right)^{\frac{2}{7}};$ |
| (f) $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4;$ | (n) $\left(\frac{a^2}{a^9}\right)^{-\frac{9}{2}};$ |
| (g) $\left(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{3}}\right)^3;$ | (o) $\left(a^{\frac{5}{4}}a\right)^{\frac{4}{5}};$ |
| (h) $\left(a^{\frac{6}{11}}b^{-\frac{6}{11}}\right)^{\frac{11}{6}};$ | (p) $\left(a^{\frac{7}{2}}a^2\right)^{\frac{2}{7}}.$ |

Logaritmus

102. Döntsük el, igazak-e a következő egyenlőségek!

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---|
| (a) $\log_{10} 1 = 1;$ | (d) $\log_{10} 10^3 = 3;$ | (g) $\log_3 81 = 5;$ |
| (b) $\log_{10} 10 = 1;$ | (e) $\log_5 125 = 2;$ | (h) $\log_4 2 = \frac{1}{2};$ |
| (c) $\log_{10} 1000 = 3;$ | (f) $\log_2 8 = 3;$ | (i) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{3}{5};$ |

(j) $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$;	(p) $\log_2 \frac{1}{64} = \frac{1}{6}$;	(v) $\log_a a^2 = 2$;
(k) $\log_8 4 = \frac{1}{2}$;	(q) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$;	(w) $\log_a a^2 = 2$;
(l) $\log_9 27 = \frac{2}{3}$;	(r) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$;	(x) $\log_a \sqrt{a} = -\frac{1}{2}$;
(m) $\log_2 \sqrt[2]{2} = \frac{1}{2}$;	(s) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$;	(y) $\log_{a^2} a = \sqrt{2}$;
(n) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$;	(t) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$;	(z) $\log_{a^3} \frac{1}{a} = -\frac{1}{3}$.
(o) $\log_{10} 5^0 = 0$;	(u) $\log_a 1 = 0$;	

103. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\log_2 4$;	(h) $\log_9 27$;	(o) $\log_3 \frac{1}{27}$;
(b) $\log_2 64$;	(i) $\log_9 81$;	(p) $\log_{10} \frac{1}{100}$;
(c) $\log_3 9$;	(j) $\log_{100} 10000$;	(q) $\log_{10} \frac{1}{10}$;
(d) $\log_3 81$;	(k) $\log_{100} 1000$;	(r) $\log_8 \frac{1}{32}$;
(e) $\log_4 \frac{1}{64}$;	(l) $\log_{64} 32$;	(s) $\log_{25} \frac{1}{5}$.
(f) $\log_5 125$;	(m) $\log_{25} 5$;	
(g) $\log_5 25$;	(n) $\log_3 \frac{1}{3}$;	

104. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\log_{\frac{1}{2}} 16$;	(h) $\log_{\frac{1}{16}} 64$;	(o) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$;
(b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$;	(i) $\log_{\frac{1}{9}} 81$;	(p) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625}$;
(c) $\log_{\frac{1}{3}} 27$;	(j) $\log_{\frac{1}{9}} 27$;	(q) $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{1000}$;
(d) $\log_{\frac{1}{3}} 81$;	(k) $\log_{\frac{1}{125}} 25$;	(r) $\log_{\frac{1}{32}} \frac{1}{128}$;
(e) $\log_{\frac{1}{5}} 625$;	(l) $\log_{\frac{1}{100}} 100$;	(s) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{81}$.
(f) $\log_{\frac{1}{10}} 1000$;	(m) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$;	
(g) $\log_{\frac{1}{10}} 100$;	(n) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;	

105. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\log_2 \sqrt{128}$;	(g) $\log_5 \sqrt{25}$;	(m) $\log_{\sqrt{5}} 25$;
(b) $\log_2 \sqrt{32}$;	(h) $\log_9 \sqrt{9}$;	(n) $\log_{\sqrt{10}} 10$;
(c) $\log_3 \sqrt{81}$;	(i) $\log_{100} \sqrt[4]{1000}$;	(o) $\log_{\sqrt{8}} 2$;
(d) $\log_3 \sqrt{9}$;	(j) $\log_{\sqrt{2}} 64$;	(p) $\log_{\sqrt{27}} 9$;
(e) $\log_4 \sqrt[3]{4}$;	(k) $\log_{\sqrt{2}} 128$;	(q) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$;
(f) $\log_5 \sqrt{625}$;	(l) $\log_{\sqrt{3}} 9$;	(r) $\log_{\sqrt[3]{2}} 16$;

$$\begin{array}{lll}
 \text{(s)} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8; & \text{(u)} \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}; & \text{(w)} \log_{\sqrt[3]{10}} \frac{1}{\sqrt[4]{10}}. \\
 \text{(t)} \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}; & \text{(v)} \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{27}}; &
 \end{array}$$

106. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \log_2 x = 5; & \text{(e)} \log_{10} x = 6; & \text{(i)} \log_5 x = -4; \\
 \text{(b)} \log_3 x = 7; & \text{(f)} \log_{11} x = 0; & \text{(j)} \log_6 x = -2. \\
 \text{(c)} \log_5 x = 3; & \text{(g)} \log_2 x = -7; & \\
 \text{(d)} \log_7 x = 3; & \text{(h)} \log_3 x = -3; &
 \end{array}$$

107. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \log_x 16 = 2; & \text{(i)} \log_x \frac{1}{125} = -3; & \text{(q)} \log_x \sqrt{8} = 3; \\
 \text{(b)} \log_x 15 = 1; & \text{(j)} \log_x \frac{1}{9} = -1; & \text{(r)} \log_x \frac{1}{27} = 3; \\
 \text{(c)} \log_x 1 = -1; & \text{(k)} \log_x 27 = \frac{3}{2}; & \text{(s)} \log_x 125 = -3; \\
 \text{(d)} \log_x 16 = 4; & \text{(l)} \log_x 8 = \frac{3}{4}; & \text{(t)} \log_x \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \\
 \text{(e)} \log_x 10000 = 2; & \text{(m)} \log_x 2 = \frac{1}{3}; & \text{(u)} \log_x \frac{1}{49} = 2; \\
 \text{(f)} \log_x 64 = 2; & \text{(n)} \log_x \frac{1}{16} = -2; & \text{(v)} \log_x 16 = -2. \\
 \text{(g)} \log_x 81 = 4; & \text{(o)} \log_x \sqrt{2} = \frac{1}{8}; & \\
 \text{(h)} \log_x \frac{1}{3} = -1; & \text{(p)} \log_x \sqrt{3} = \frac{1}{2}; &
 \end{array}$$

108. Igazak-e a következő egyenlőségek?

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \lg(5 + 6) = \lg 5 + \lg 6; \\
 \text{(b)} \lg 0,2 + \lg 0,5 = \lg 0,7; \\
 \text{(c)} \lg a^2 = 2 \lg a, \text{ ha } a > 0; \\
 \text{(d)} \lg(a(a - 2)) = \lg a + \lg(a - 2), \text{ ha } a > 2; \\
 \text{(e)} \lg \frac{a}{a-5} = \lg a - \lg(a - 5), \text{ ha } a > 5; \\
 \text{(f)} \lg \sqrt{a} = \frac{1}{2} \lg a, \text{ ha } a > 0.
 \end{array}$$

109. A logaritmus azonosságok felhasználásával fejezzük ki x -et!

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \log_2 x = 2 \log_2 12 - \log_2 18; \\
 \text{(b)} \log_{10} x = -2 \log_{10} 5 + 3 \log_{10} 2; \\
 \text{(c)} \log_a x = 2 \log_a b - 4 \log_a c; \\
 \text{(d)} \log_a x = \frac{2}{3} \log_a(b - c);
 \end{array}$$

(e) $\log_a x = \frac{2}{5} \log_a b - \frac{1}{3} \log_a c$;

(f) $\log_a x = 5 \log_a b$.

Exponenciális és logaritmikus egyenletek

110. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

(a) $2^x = 8$

(l) $7^{3x} = 1$;

(b) $2^x = 16$;

(m) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$;

(c) $3^x = 27$;

(n) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$;

(d) $3^{2x} = 9$;

(o) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$;

(e) $3^{2x} = \frac{1}{27}$;

(p) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{25}$;

(f) $5^{3x} = 25$;

(q) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$;

(g) $2^{3x-4} = 4$;

(r) $\left(\frac{9}{10}\right)^{5x-2} = \frac{81}{100}$;

(h) $2^{3-x} = 64$;

(s) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-7x} = \frac{16}{81}$;

(i) $3^{4-2x} = \frac{1}{3}$;

(t) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3x-4} = \frac{64}{125}$;

(j) $4^{5x+1} = 16$;

(u) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = \frac{2}{3}$;

(k) $9^{1-3x} = 3$;

(v) $\left(\frac{7}{11}\right)^{5x+3} = 1$.

111. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

(a) $16^x = 8^{x+1}$;

(e) $5^x = 4^x$;

(b) $8^x = 64^{x+1}$;

(f) $2^{7x+2} = 4^{3x+5}$;

(c) $81^x = \frac{1}{9} 2^{x-3}$;

(g) $3^{2x+9} = \frac{1}{3^{7x+6}}$.

(d) $25^x = 5^{1-x}$;

112. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

(a) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 810$;

(e) $4 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+1} = 25$;

(b) $2^{x+1} + 4^x = 8$;

(f) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$;

(c) $4^x - 9 \cdot 2^x = -8$;

(g) $5^x + \frac{125}{5^x} = 30$.

(d) $2^{x+2} - 2^{2-x} = 15$;

113. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $\log_2 x = 3$; | (i) $\log_2 5625 = x$; |
| (b) $\log_3 x = 2$; | (j) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$; |
| (c) $\log 100x = \frac{5}{2}$; | (k) $\log_{\sqrt{2}} 64 = x$; |
| (d) $\log_2(7x + 6) = 4$; | (l) $\log_5 \frac{1}{5} = 6x + 3$; |
| (e) $\log_5(9 - 6x) = 2$; | (m) $\log_4 \frac{1}{16} = 3x + 2$; |
| (f) $\log_2 4 = x$; | (n) $\log_2 \frac{1}{8} = 3x + 5$; |
| (g) $\log_3 81 = x$; | (o) $\log_5 \frac{1}{25} = 6x + 5$. |
| (h) $\log_9 9 = x$; | |

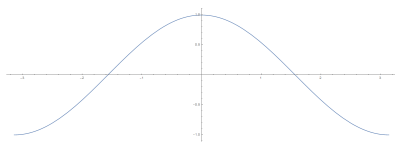
114. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

- | | |
|--|---|
| (a) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; | (g) $\lg x = -2 \lg 5$; |
| (b) $\log_x 8 = -\frac{1}{2}$; | (h) $2 - \lg x = \lg 2 + \lg 4 + \lg 25$; |
| (c) $\log_x \frac{1}{64} = -3$; | (i) $\lg x + \lg 2 = \lg(x + 3)$; |
| (d) $\log_x(x + 6) = 2$; | (j) $2 \lg x = \lg 16 + \lg 4$; |
| (e) $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$; | (k) $\frac{\lg x}{\lg x - \lg 2} = 3$; |
| (f) $\lg x = \lg 2 + \lg 4$; | (l) $\frac{\lg(2x+5) - \lg x}{2 + \lg 100} = \frac{1}{4}$. |

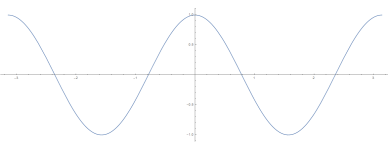
115. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

- | | |
|---|---|
| (a) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; | (d) $\log_4 x + \log_x 4 = 2$; |
| (b) $\log_9 x = \frac{1}{2} \log_x 3$; | (e) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$; |
| (c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$; | (f) $\log_9 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$. |

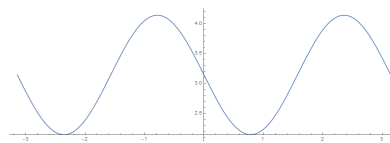
Megoldások-Függvényábrázolás



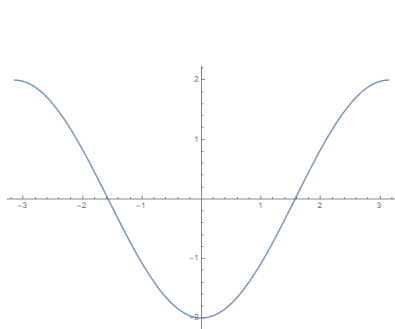
(a) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), p = 2\pi$



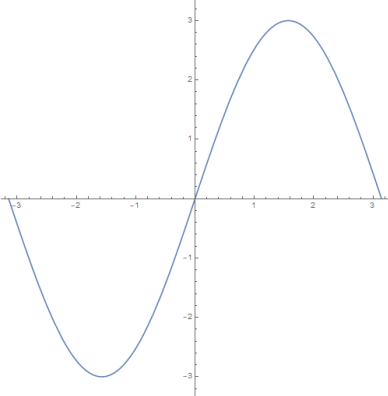
(b) $x \mapsto \cos(2x), p = \pi$



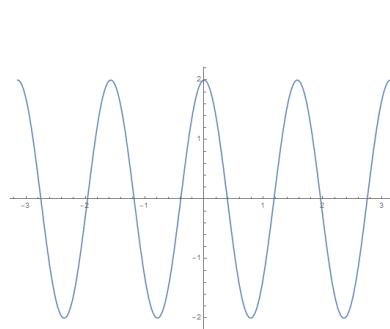
(c) $x \mapsto -2 \sin(2x) + \pi, p = \pi$



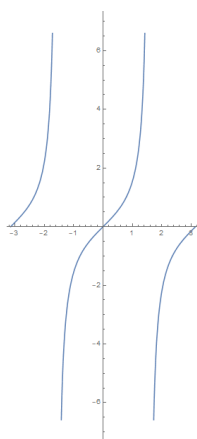
(d) $x \mapsto 2 \cos(x + \pi), p = 2\pi$



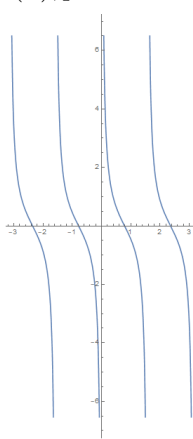
(e) $x \mapsto 3 \sin(x), p = 2\pi$



(f) $x \mapsto 2 \cos(4x), p = \frac{\pi}{2}$

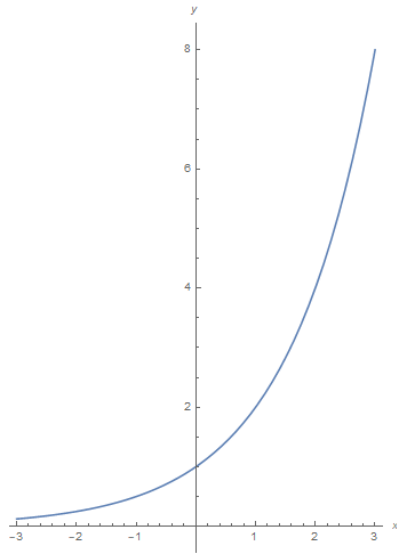


(g) $x \mapsto \tan(x + \pi), p = \pi$

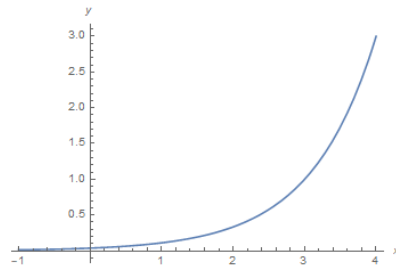


(h) $x \mapsto \cot(2x), p = \frac{\pi}{2}$

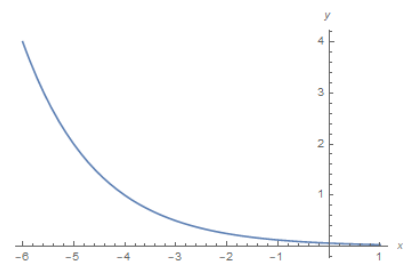
1.



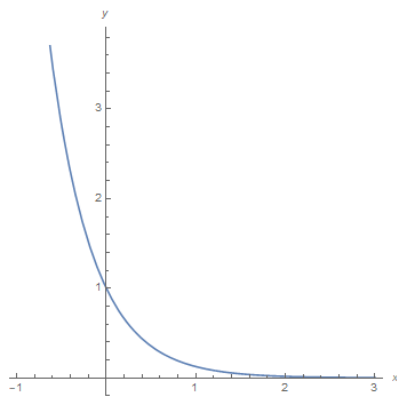
(a) $x \mapsto 2^x, y = 1$



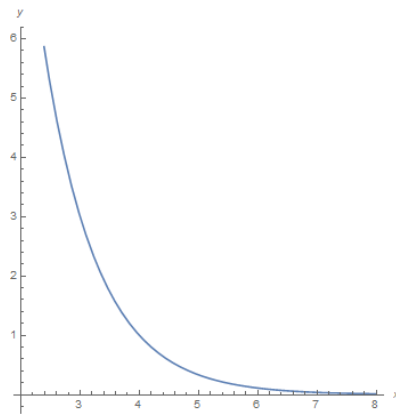
(b) $x \mapsto 3^{x-3}, y = \frac{1}{27}$



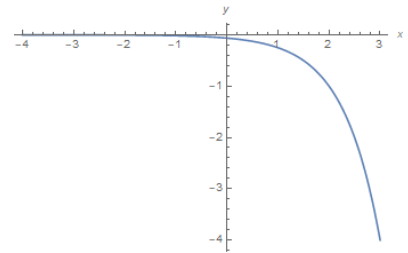
(c) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}, y = \frac{1}{16}$



(d) $x \mapsto 2^{-3x}, y = 1$

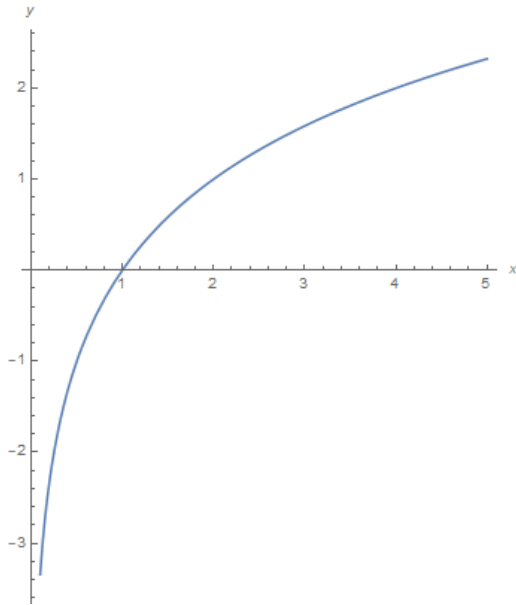


(e) $x \mapsto 3^{4-x}, y = 81$

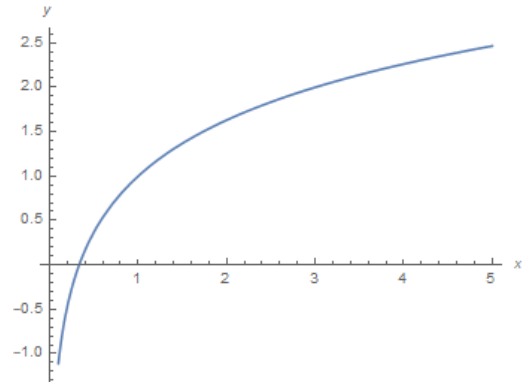


(f) $x \mapsto -\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}, y = -\frac{1}{16}$

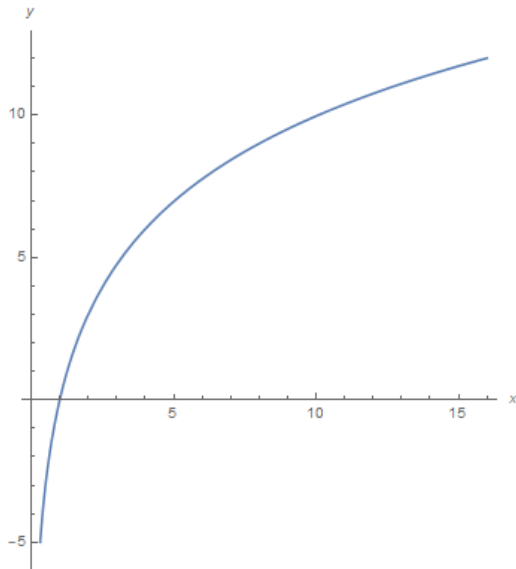
2.



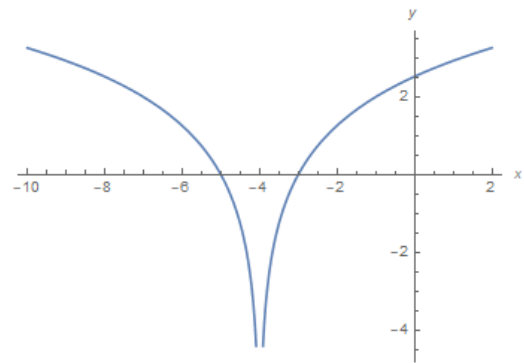
(a) $x \mapsto \log_2 x, D_f =]0, \infty[$



(b) $x \mapsto \log_3(3x), D_f = [0, \infty[$



(c) $x \mapsto \log_2 x^3, D_f =]0, \infty[$



(d) $x \mapsto \log_3(x+4)^2, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

3.

4. (a) $x \mapsto \sin(x+4)$

(b) $x \mapsto \sin x + 2$

(c) $x \mapsto \sin(x+1) - 3$

(d) $x \mapsto 2 - \sin x$

(e) $x \mapsto \sin(1-x)$

(f) $x \mapsto \sin(2x)$

5. (a) $x \mapsto 3^{x+1}$

(b) $x \mapsto 3^x + 4$

(c) $x \mapsto 3^{x-2} + 3$

(d) $x \mapsto -3^x$

(e) $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

6.

- (a) $x \mapsto \log_2 x + 3$ (d) $x \mapsto \log_2(-x)$
 (b) $x \mapsto \log_2(x + 2)$ (e) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$
 (c) $x \mapsto \log_2(x + 4) + 2$ (f) $x \mapsto \log_2 x^3$
7. (a) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ (e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 (b) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$ (f) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
 (c) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ (g) $\mathbb{R}$
 (d) $]0, \infty[$ (h) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
8. (a) $\mathbb{R}$ (d) $[1, \infty[$
 (b) $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ (e) $\mathbb{R}$
 (c) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (f) $\mathbb{R}$
9. (a) szigorúan monoton nő
 (b) szigorúan monoton nő $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, szigorúan monoton csökken $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 (c) szigorúan monoton csökken
 (d) szigorúan monoton nő $] - \infty, 0]$, szigorúan monoton csökken $[0, \infty[$
 (e) szigorúan monoton nő
 (f) szigorúan monoton csökken $] - \infty, 0[$, szigorúan monoton nő $]0, \infty[$
10. (a) korlátos, a.k.: -1, f.k.: 1 (f) nem korlátos
 (b) nem korlátos (g) alulról korlátos, a.k.: 2
 (c) nem korlátos (h) nem korlátos
 (d) alulról korlátos, a.k.: 0
 (e) alulról korlátos, a.k.: 0 (i) nem korlátos
11. (a) minimum hely: $\{\frac{(2k+1)\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$, érték: -1;
 maximum hely: $\{\frac{2k\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$, érték: 1
 (b) minimum hely: $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, érték: 1;
 maximum hely: $\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, érték: -1
 (c) maximum hely: 0, érték: 1
 (d) minimum hely: 0, érték: 1
 (e) -
 (f) -

12. A növény által benőtt terület $d \mapsto 4 \cdot 2^d = 2^{d+2}$, ahol d az eltelt napok száma. A $60 \leq 2^{d+2}$ egyenlőtlenség megoldása a $d \geq \log_2 60 - 2 \approx 3,9$, tehát 4 nap alatt növi be a növény a teljes területet.
13. Az 5-ös és 6-os erősség között 10-szeres a különbség, tehát energia szempontjából már $10^{\frac{3}{2}} \approx 31,62$ -szeres a különbség. Az 5-ös és 7-es erősség között pedig 100-szoros a különbség, tehát $100^{\frac{3}{2}} = 1000$ -szeres az energia.
14. Az első év végén $1000000 \cdot 1,03$ a betét értéke, a következő évben $1000000 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 1000000 \cdot 1,03^2$, és így tovább. Az n . év végén lévő pénzmennyiséget az $n \mapsto 1000000 \cdot 1,03^n$ függvény írja le. A $2000000 \leq 1000000 \cdot 1,03^n$ egyenlőtlenség megoldása az $n \geq \log_{1,03} 2 \approx 23,45$, tehát a 24. év végén duplázódik meg a pénzünk.
15. Legyen m az eltelt percek száma. A trigonometrikus függvények általános definíciója miatt az árnyék éppen a 12 órától mért szög szinuszával írható le. Az árnyék hossza mindig pozitív és 30 percenként periodikusan ismétlődik. Ezek alapján az árnyék méterben kifejezett hosszát leíró függvény: $m \mapsto 3,5 |\sin(\frac{2\pi m}{60})|$
16. A kérdéses d távolság és az Eiffel torony egy derékszögű háromszög két befogója, így $\cot \alpha = \frac{d}{300}$, ahol α a torony látószöge. Ebből a távolságot leíró függvény $\alpha \mapsto 300 \cot \alpha$. A kérdéses távolság így $d = 300 \cot 36^\circ \approx 412,91$ méter.
17. Ha n az eltelt napok száma, akkor a virág hosszát az $n \mapsto 20(1 + 0,06)^n$ függvény írja le. A 8. nap végére $20(1 + 0,06)^8 \approx 31,88$ cm hosszú. A $30 \leq 20(1 + 0,06)^n$ egyenlőtlenség megoldására adódik, hogy $n \geq \log_{1,06} 1,5 \approx 6,96$, vagyis a 7. nap végére nagyobb lesz a szár, mint 30cm.
18. Ha e az eltelt évek száma, akkor a termelésnövekedést az $e \mapsto (1 + 0,05)^e$ függvény írja le. A $1,4 \leq (1 + 0,05)^e$ egyenlőtlenség megoldására adódik, hogy $e \geq \log_{1,05} 1,4 \approx 6,9$, vagyis a 7. év végére nagyobb lesz növekedés, mint 40%.
19. Az egy hónapra jutó kamatláb $\frac{0,03}{12} = 0,0025$, tehát a kamatot a $h \mapsto (1 + 0,0025)^h$ függvény írja le, ahol h az eltelt hónapok száma. Az éves kamatláb így $1,0025^{12} \approx 1,0304$, vagyis 3,04%.
20. A papírlap vastagságát kilométerben kifejezve a $h \mapsto 10^{-7} \cdot 2^h$ függvény írja le, ahol h a félbehajtások száma. A $384400 \leq 10^{-7} \cdot 2^h$ egyenlőtlenség megoldására adódik, hogy $h \leq \log_2(3844 \cdot 10^9) \approx 41,81$, tehát 42 hajtogatás után már a Holdig érünk.
21. A Földtől mért távolságunk kilométerben mérve és a Föld-Nap távolság (továbbiakban Csillagászati Egység) egy derékszögű háromszög két befogója, így $\cot \alpha =$

$\frac{d}{150 \cdot 10^6}$, ahol α a CsE látószöge. A kérdéses távolság így $d = 150 \cdot 10^6 \cot 1'' \approx 3,09397209375 \cdot 10^{13} \text{km}$ (valójában $3,08567758066631 \cdot 10^{13} \text{km}$).

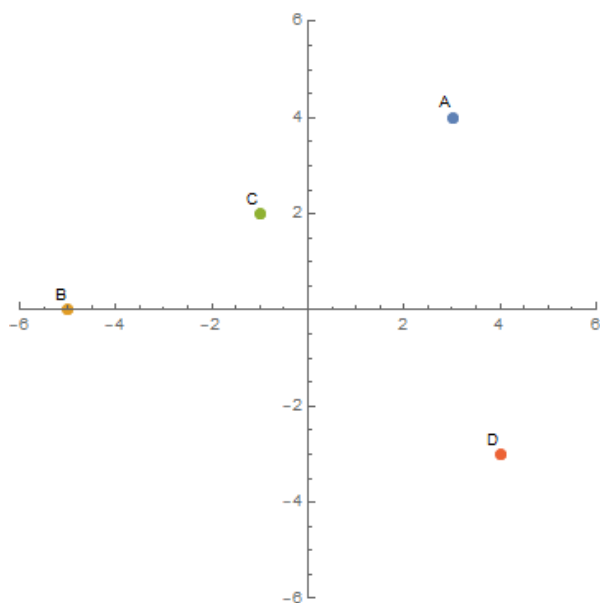
Megoldások-Sorozatok

22. (a) $d = 1, a_5 = 6$ (d) $d = 2, a_5 = 5$
 (b) $d = 2, a_5 = 11$ (e) $d = -5, a_5 = 31$
 (c) $d = -3, a_5 = -11$
23. (a) 4, 5, 6, 7, 8 (c) 6, 8, 10, 12, 14
 (b) 3, 6, 9, 12, 15 (d) $-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$
24. (a) 1, 3, 9 (c) $\frac{3}{2}, 3, 6$
 (b) $\frac{1}{2}, 1, 2$ (d) $-10000, 1000, -100$
25. (a) $q = \pm 1, a_5 = 2$ (c) $q = -2, a_5 = -32$
 (b) $q = \pm 3, a_5 = 81$ (d) $q = -4, a_5 = \frac{1}{32}$
26. (a) 120 (d) 27,5
 (b) 5 (e) 1605
 (c) 140 (f) -667,5
27. (a) 40 (d) 97656
 (b) -255 (e) $\frac{1640}{3}$
 (c) $\frac{6305}{48}$ (f) 13107, ha $q = -4$ és 21845, ha $q = 4$
28. Az elős 16 napon a felületek száma egy $a_1 = 30$ és $d = 5$ paraméterű számtani sorozat, így a 16. napon 105, addig összesen 1080 felületet végzünk. A 17-31 napokon pedig egy $a_1 = 100$ és $d = -5$ paraméterű számtani sorozat mentén alakul a gyakorlatok száma, ami 975 felületet jelent. Ez összesen 2055 db felülés.
29. Vegyük külön a bronzmérkőzést. A maradék asszuók száma így egy mértani sorozatot követ, melynek első eleme 128, kvóciense pedig $\frac{1}{2}$. A 7. fordulóban már csak 1 mérkőzés marad, ami a döntő. Tehát addig 255 asszuót bonyolítanak le, a bronzmérkőzéssel 256-ot. Másik megoldás(akkor is működik, ha az indulók száma nem 2 hatvány): Minden asszuóban 1 ember esik ki a győzelemért folytatott harcból. 255 embernek kell kiesnie, ami 255 asszuót jelent, plusz a bronzmérkőzés.

30. Ez egy $a_1 = 1$ $q = 2$ mértani sorozat, melynek első 64 elemének összege 18 446 744 073 709 551 615. (Ehhez összesen kb 12 évig kellene búzát termesztetni a Föld minden szárazföldjén)
31. Minden páratlanadik lépésben az x koordinátánk változik, minden páros lépésben az y . Így 2 lépésenként a lépésvektorunk x koordinátája egy $a_1 = 100$, $q = -\frac{1}{4}$, míg az y koordinátája egy $b_1 = 50$, $q = -\frac{1}{4}$ paraméterű mértani sorozatot követ. 20 lépés után az összegképlet segítségével a helyzetünk $(\frac{5242875}{65536}, \frac{5242875}{131072})$. Ez nagyon közel van a $(80, 40)$ ponthoz, amihez minden lépésben közelebb kerülünk.
32. A fizetés egy $a_1 = 180000$, $d = 2500$ paraméterű számtani sorozatot követ, melyre $a_{12} = 207500$ és az első 12 tag összege 2325000.
33. Az első évben berakott pénzre 9-szer hat a pénzromlás, a második évben berakottra 8-szor, és így tovább. Így a folyószámlán lévő pénz értéke egy 10 tagú mértanis sorozat összege, melynek első tagja 1000000, kvóciense pedig 0,95. A pénz valós értéke egészre kerekítve: 8025261 Ft.
34. Ez az $a_1 = 1$, $d = 1$ paraméterű számtani sorozat első 200 tagjának összege, ami 20100.
35. Mivel havi kamatozású, ezért az évi 6% 12 hónapra elosztva havi 0,5%-ot jelent. Az első hónapban berakott pénzünk 47-szer kamatozik, a második hónapban berakott 46-szor, és így tovább. Így a pénzünk az $a_1 = 20000$, $q = 1,005$ kvóciensű mértani sorozat első 48 tagjának az összege, ami egészre kerekítve 1081956 Ft.
36. 0,2,4,6,8,10
37. $a_1 = 15$, $d = -2$
38. $a_1 = 6$, $d = 2$
39. $a_1 = 3$, $d = 3$
40. $a_1 = 2$, $q = 3$
41. $a_1 = 1$, $q = 3$

Megoldások-Koordináta geometria

42. /egy ábrán/



43. (a) I. síknegyed
(b) III. síknegyed
(c) IV. síknegyed
(d) II. síknegyed
(e) IV. síknegyed
(f) I-II síknegyed
44. (a) (0,2.5)
(b) (3,0.5)
(c) (-2,5.5)
(d) (-1,6)
45. (a) (-7,-8)
(b) (7,8)
(c) (-8,6)
(d) (2,-17)
(e) (-1,-1)
(f) (-6,-7)
46. (a) (-0.5,4.5)
(b) (0,4)
(c) (-1,5)
47. (0,0)
48. $D(3, -2), (2,0)$
49. (a) $x - y = 0$
(b) $x + 3y = 3$
(c) $3x - 2y = -11$
(d) $y = 2$
(e) $y = 1$
(f) $x + 2y = 8$
50. (a) $x - y = 0$
(b) $y = 3$
(c) $4y - 5x = 11$
(d) $x + 4y = 9$
(e) $x + 6y + 17 = 0$

51. (a) $x + y = 3$ (c) $x + 4y = 6$
 (b) $x + 2y = 2$ (d) $x + 2 = 0$
52. (a) $x + y = 0$ (d) $y - 2x = 3$
 (b) $y - 2x + 5 = 0$ (e) $3x - y = 7$
 (c) $x = 2$ (f) $y + 5 = 0$
53. (a) $2y - x = 3$ (d) $2x + 5y = 20$
 (b) $y - x = 1$ (e) $x + 2 = 0$
 (c) $y = 2$
54. (a) $3x + y + 1 = 0$ (c) $3x + y = 11$
 (b) $5x - 4y = 17$ (d) $5x - 4y + 2 = 0$
55. (a) $P(1, 2), \mathbf{n}(1, 1), \mathbf{v}(1, -1)$ (d) $P(2, -4), \mathbf{n}(2, -5), \mathbf{v}(5, 2)$
 (b) $P(0, 2), \mathbf{n}(2, -1), \mathbf{v}(1, 2)$ (e) $P(-4, 0), \mathbf{n}(-1, -13), \mathbf{v}(13, -1)$
 (c) $P(-1, 0), \mathbf{n}(4, -3), \mathbf{v}(3, 4)$ (f) $P(1, 1), \mathbf{n}(4, 43), \mathbf{v}(-43, 4)$
56. (a) Nem (b) Igen (c) Igen
57. (a) Igen (b) Nem (c) Nem
58. (a) (1,0) (c) nincs metszéspont
 (b) (2,1) (d) (-1,3)
59. $x - 2y = 0$
60. (a) $x + 2y = 7$ (c) $2x - 3y + 10 = 0$
 (b) $x + y = 5$ (d) $5x + 2y = 6$
61. (a) (1,1) (c) (3,1)
 (b) (0,1) (d) (2,1)
62. (a) x: 5, y: 5 (c) x: -3, y: 7.5
 (b) x: 5, y: -15 (d) x: -1, y: $\frac{1}{6}$
63. (a) 4 (c) $\frac{45}{4}$
 (b) $\frac{75}{2}$ (d) $\frac{1}{12}$

64. $x + 5y = 38$

65. $b = -7$

66. (a) $\sqrt{5}$

(d) $\sqrt{90}$

(b) 5

(e) $\sqrt{58}$

(c) 13

(f) 25

67. (a) 6

(c) -11

(b) 0

(d) -1

68. (a) hegyesszög

(c) derékszög

(b) hegyesszög

(d) tompaszög

69. (a) 45°

(c) $\approx 145,03^\circ$

(b) 90°

(d) $\approx 38,03^\circ$

70. (a) 45°

(c) 90°

(b) $\approx 60,26^\circ$

(d) 75°

71. (a) 5

(c) $\sqrt{29}$

(b) 13

(d) $\sqrt{5}$

72. $O(2,3), r=5$

73. $O(-4,0), r=10$

74. (a) 32

(b) 25

(c) 20

75. (a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 23 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

(e) $25x^2 + 25y^2 + 50x - 150y + 241 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

(f) $x^2 + y^2 - 2u - 2v + u^2 + v^2 - r^2 = 0$

76. (a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 6y = 0$

77. (a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

(e) $(x - u)^2 + (y - v)^2 = u^2 + v^2$

(b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$

(f) $(x - 5)^2 + y^2 = 58$

(c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

(g) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(d) $(x - 0.5)^2 + (y - 9)^2 = 6.25$

(h) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$

78. (a) $O(0,0)$, $r=4$

(c) $O(-3,4)$, $r=5$

(b) $O(1,0)$, $r=4$

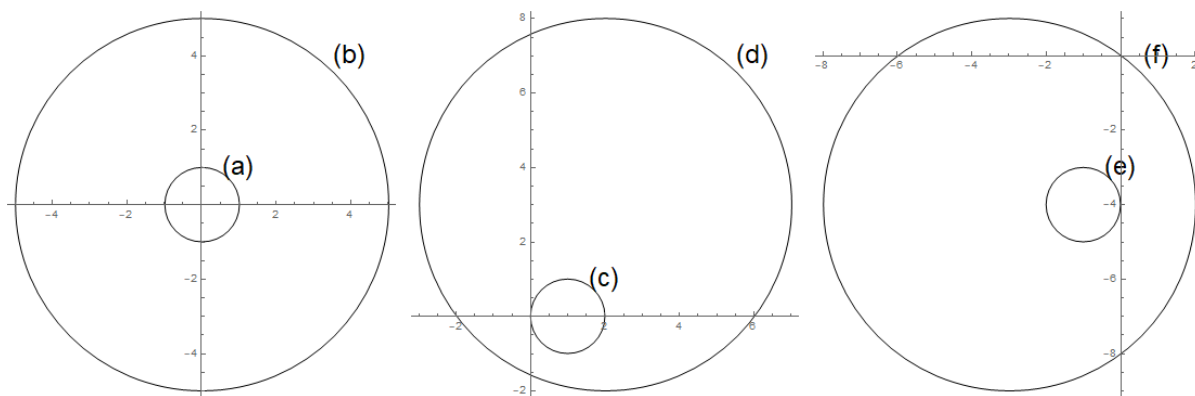
(d) $O(2,-1)$, $r=7$

79. (a) belül

(c) kívül

(b) rajta

(d) belül



80.

81. (a) $x^2 + y^2 = 4$

(c) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

(b) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

(d) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$

82. $A(-2, 2)$, $B(5, 5)$, $C(2, -4)$ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

83. $P_1(-2, 4)$, $P_2(2, 6)$

84. $(3, 4)$

85. $x + y = 7$

Megoldások-Algebra

n -edik gyök

86. (a) 2;

(g) 1;

(m) $\frac{1}{2}$;

(b) 3;

(h) -1 ;

(n) $-\frac{1}{3}$;

(c) 2;

(i) $\frac{1}{2}$;

(o) $\frac{0,1}{5}$;

(d) $\frac{1}{2}$;

(j) $\frac{1}{0,3}$;

(p) $\frac{5}{2}$;

(e) 2;

(k) $\frac{1}{10}$;

(q) $\frac{3}{2}$;

(f) -10 ;

(l) $\frac{1}{3}$;

(r) $\frac{2}{3}$;

- (s) $\frac{10}{3}$; (t) $-\frac{0.1}{2}$; (u) $-\frac{5}{3}$.
87. (a) $-0+$; (c) $-0+$; (e) 0 ;
(b) $0+$; (d) -0 ; (f) -0 ;
88. (a) $3\sqrt[3]{3}$; (f) $3\sqrt[4]{3}$; (k) $2a$;
(b) $5\sqrt[3]{5}$; (g) $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{3}$; (l) $3a\sqrt[3]{a}$;
(c) $10\sqrt[3]{100}$; (h) $2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$; (m) $5a\sqrt[3]{a}$;
(d) $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; (i) $\frac{10}{3}\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$; (n) $2ab\sqrt[4]{2a}$;
(e) $2\sqrt[4]{2}$; (j) $\frac{2}{10}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$; (o) $3ab\sqrt[5]{a^2b}$.
89. (a) $\sqrt[3]{63}$; (f) $\sqrt[3]{10^7}$; (k) 1 ;
(b) $\sqrt[3]{210}$; (g) $\sqrt[3]{2a^6b}$; (l) $\sqrt[4]{\frac{2^4b}{7^4a^5}}$;
(c) $\sqrt[4]{\frac{7}{81}}$; (h) $\sqrt[4]{60a^6}$; (m) $\sqrt[5]{-\frac{a}{7}}$;
(d) $\sqrt[3]{5^4}$; (i) $\sqrt[3]{5^3a^5b}$;
(e) $\sqrt[3]{9^4}$; (j) $\sqrt[4]{6^4a^5b^4}$;
90. (a) 15 ; (h) 3 ; (o) 49 ;
(b) 20 ; (i) $\frac{3}{2}$; (p) $3a^3$;
(c) 6 ; (j) $\frac{10}{3}$; (q) $36a^2$;
(d) 20 ; (k) $\frac{2}{50}$; (r) $-2a$;
(e) $\frac{3}{2}$; (l) $\frac{2}{0.003}$; (s) $\frac{11}{3a^2}$;
(f) 9 ; (m) -2 ; (t) a ;
(g) -8 ; (n) 81 ; (u) $-\frac{9a}{b^2}$.
91. (a) $\frac{3}{10}$; (f) $\frac{3}{2}$; (k) $\frac{3}{5}$;
(b) 10 ; (g) $\frac{1}{3}$; (l) $3a$;
(c) $\frac{2}{3}$; (h) 10 ; (m) $\sqrt[4]{5a}$;
(d) 8 ; (i) $-\frac{1}{2}$; (n) 2 ;
(e) $\frac{2}{5}$; (j) $\frac{2}{3}$; (o) $2b^2$.
92. (a) 3 ; (d) 256 ; (g) $4\sqrt[2]{27a^3}$;
(b) 7 ; (e) 100 ; (h) $\sqrt[3]{\frac{49}{a^2}}$;
(c) 81 ; (f) 32 ; (i) $\frac{a^{21}}{2^{12}}$.

93. (a) $\sqrt[6]{11}$; (f) $\sqrt[6]{6a}$; (k) $\sqrt[12]{3^4}$;
 (b) $\sqrt[6]{10}$; (g) $\sqrt[16]{11a^3}$; (l) $\sqrt[12]{\frac{2^4}{9}}$;
 (c) $\sqrt[9]{12}$; (h) $\sqrt[6]{10a^3}$; (m) $\sqrt[4]{\frac{a}{5}}$;
 (d) $\sqrt[20]{7}$; (i) $\sqrt[15]{6^3a^5b}$; (n) $\sqrt[15]{\frac{a}{6^3b^4}}$;
 (e) $\sqrt[6]{5a}$; (j) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 6^3}$;
 94. (a) $\frac{\sqrt[3]{4^4}}{4}$; (d) $\frac{\sqrt[5]{10^9}}{10}$; (f) $\frac{\sqrt[5]{(a+7)^7}}{a+7}$;
 (b) $\frac{\sqrt[4]{3^5}}{3}$; (e) $\frac{\sqrt[3]{(a+11)^5}}{a+11}$; (g) $\frac{\sqrt[3]{(a-5)^2}}{a-5}$;
 (c) $\frac{\sqrt[4]{2^5}}{2}$;

Törtekitevőjű hatványok

95. (a) 125; (g) 1000000; (m) $\frac{4}{0,01}$;
 (b) 7^5 ; (h) 0, 1; (n) $\frac{10000}{625}$;
 (c) 100000; (i) 8; (o) $\frac{125}{27}$;
 (d) $\frac{1}{27}$; (j) $\frac{1}{16}$; (p) $\frac{10}{2}$;
 (e) 9; (k) 9;
 (f) 25; (l) $\frac{1}{8}$;
 96. (a) $a^{\frac{1}{2}}$; (e) $a^{\frac{2}{3}}$; (i) $2^{\frac{5}{6}}a^{\frac{1}{2}}$;
 (b) $2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$; (f) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{12}}$; (j) $2^{\frac{3}{4}}a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{8}}$;
 (c) $a^{\frac{1}{3}}b$; (g) $a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{12}}$;
 (d) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$; (h) $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{25}}$;
 97. (a) $3^{1/5}$; (f) $a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{2}{3}}$; (k) a^3b^2 ;
 (b) $5^{\frac{3}{5}}$; (g) $(a+b)^{\frac{2}{9}}$; (l) $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{14}}$;
 (c) $a^{\frac{5}{7}}$; (h) $(a+b^6)^{\frac{1}{11}}$; (m) $a^{\frac{13}{30}}b^{\frac{1}{30}}$;
 (d) $a^{\frac{9}{2}}$; (i) $a^{\frac{1}{12}}b$; (n) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{13}{8}}$;
 (e) $2^{\frac{1}{4}}a^{\frac{11}{4}}$; (j) a^3b^2 ;
 98. (a) $\sqrt[3]{a^2}$; (d) $\sqrt[10]{a^2b}$; (g) $\sqrt[42]{a^{36}b^{-49}}$;
 (b) $\sqrt{a}, \sqrt[7]{a}$; (e) $\sqrt{\frac{27}{a^3}}$;
 (c) $\sqrt[4]{8a^3}$; (f) $\sqrt[20]{a^{16}b^{25}}$;

99.

- | | | |
|----------------------------|---|---|
| (a) $\sqrt[3]{4^2}$; | (d) $\sqrt[3]{(6)^7}$; | (g) $\sqrt[20]{a^{15}b^{12}}$; |
| (b) $\sqrt[6]{7^5}$; | (e) $\sqrt[4]{a^{18}b^3}$; | (h) $\sqrt[40]{a^{32}b^{35}}$; |
| (c) $\sqrt[7]{a^4}$; | (f) $\sqrt[9]{a^{26}}$; | (i) $\sqrt[24]{a^6b^{-40}}$. |
| 100. (a) a^5 ; | (f) $a^{\frac{11}{5}}$; | (k) $a^{\frac{50}{7}}b^{\frac{2}{3}}$; |
| (b) $a^{\frac{25}{6}}$; | (g) a ; | (l) $a^6b^{-\frac{1}{3}}$; |
| (c) $a^{\frac{46}{45}}$; | (h) $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{11}{3}}$; | (m) $a^9 - b^9$. |
| (d) $a^{\frac{-7}{4}}$; | (i) 1 ; | |
| (e) $a^{\frac{111}{11}}$; | (j) $a^{\frac{58}{3}}b^{\frac{58}{21}}$; | |
| 101. (a) a^2 ; | (g) a^4b^{-3} ; | (m) $a^{\frac{4}{7}}b^{-2}$; |
| (b) a^{-2} ; | (h) ab^{-1} ; | (n) $a^{\frac{63}{2}}$; |
| (c) $a^{-\frac{3}{7}}$; | (i) $a^{\frac{14}{3}}b^{\frac{5}{3}}$; | (o) $a^{\frac{9}{5}}$; |
| (d) $a^{\frac{36}{25}}$; | (j) $\frac{9}{6}a^2b^{-1}$; | (p) $a^{\frac{11}{7}}$. |
| (e) a ; | (k) $\frac{7}{2}a^{-4}b^3$; | |
| (f) $ab^{\frac{4}{3}}$; | (l) a^7b^{-7} ; | |

Logarithmus

- | | | |
|-------------|---------------------|---------------------|
| 102. (a) H; | (j) I; | (s) H; |
| (b) I; | (k) H; | (t) I; |
| (c) I; | (l) H; | (u) I; |
| (d) I; | (m) I; | (v) I; |
| (e) H; | (n) I; | (w) I; |
| (f) I; | (o) I; | (x) H; |
| (g) H; | (p) H; | (y) H; |
| (h) I; | (q) H; | (z) I. |
| (i) H; | (r) I; | |
| 103. (a) 2; | (f) 3; | (k) $\frac{3}{2}$; |
| (b) 6; | (g) 2; | (l) $\frac{5}{8}$; |
| (c) 2; | (h) $\frac{3}{2}$; | (m) $\frac{1}{2}$; |
| (d) 4; | (i) 2; | (n) -1 ; |
| (e) -4 ; | (j) 2; | (o) -3 ; |

- | | | | |
|------|---------------------|----------------------|----------------------|
| | (p) -2 ; | (r) $-\frac{5}{3}$; | |
| | (q) -1 ; | (s) $-\frac{1}{2}$. | |
| 104. | (a) -4 ; | (h) $-\frac{3}{2}$; | (o) 2 ; |
| | (b) -3 ; | (i) -2 ; | (p) 4 ; |
| | (c) -3 ; | (j) $-\frac{3}{2}$; | (q) 3 ; |
| | (d) -4 ; | (k) $-\frac{2}{3}$; | (r) $\frac{7}{5}$; |
| | (e) -4 ; | (l) -1 ; | (s) $\frac{4}{3}$. |
| | (f) -3 ; | (m) 2 ; | |
| | (g) -2 ; | (n) 3 ; | |
| 105. | (a) $\frac{7}{2}$; | (i) $\frac{3}{8}$; | (q) 6 ; |
| | (b) $\frac{5}{2}$; | (j) 12 ; | (r) 12 ; |
| | (c) 2 ; | (k) 14 ; | (s) -6 ; |
| | (d) 1 ; | (l) 4 ; | (t) -4 ; |
| | (e) $\frac{1}{3}$; | (m) 4 ; | (u) -2 ; |
| | (f) 2 ; | (n) 2 ; | (v) -3 ; |
| | (g) 1 ; | (o) $\frac{2}{3}$; | (w) $-\frac{3}{4}$. |
| | (h) $\frac{1}{2}$; | (p) $\frac{4}{3}$; | |
| 106. | (a) 2^5 ; | (e) 10^6 ; | (i) 5^{-4} ; |
| | (b) 3^7 ; | (f) 1 ; | (j) 6^{-2} . |
| | (c) 5^3 ; | (g) 2^{-7} ; | |
| | (d) 7^3 ; | (h) 3^{-3} ; | |
| 107. | (a) 4 ; | (i) 5 ; | (q) $\sqrt{2}$; |
| | (b) 15 ; | (j) 9 ; | (r) $\frac{1}{3}$; |
| | (c) 1 ; | (k) 9 ; | (s) $\frac{1}{5}$; |
| | (d) 2 ; | (l) 16 ; | (t) $\frac{1}{2}$; |
| | (e) 100 ; | (m) 8 ; | (u) $\frac{1}{7}$; |
| | (f) 8 ; | (n) 4 ; | (v) $\frac{1}{4}$. |
| | (g) 3 ; | (o) 16 ; | |
| | (h) 3 ; | (p) 3 ; | |
| 108. | | | |

- | | | | |
|------|----------------------|---------------------------|---|
| | (a) H; | (c) I; | (e) I; |
| | (b) H; | (d) I; | (f) I. |
| 109. | (a) 8; | (c) $\frac{b^2}{c^4}$; | (e) $\frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[3]{c}}$; |
| | (b) $\frac{8}{25}$; | (d) $\sqrt[3]{(b-c)^2}$; | (f) b^5 . |

Exponenciális és logaritmikus egyenletek

- | | | | |
|------|------------------------|----------------------|-----------------------|
| 110. | (a) 3; | (i) $\frac{5}{2}$; | (q) -1 ; |
| | (b) 4; | (j) $\frac{1}{5}$; | (r) $\frac{4}{5}$; |
| | (c) 3; | (k) $-\frac{5}{6}$; | (s) 0; |
| | (d) 1; | (l) 0; | (t) $\frac{1}{3}$; |
| | (e) $-\frac{3}{2}$; | (m) -2 ; | (u) $-\frac{3}{5}$; |
| | (f) $\frac{2}{3}$; | (n) -2 ; | (v) $-\frac{3}{5}$. |
| | (g) 1; | (o) -4 ; | |
| | (h) -3 ; | (p) 2; | |
| 111. | (a) 3; | (d) $\frac{1}{3}$; | (g) $-\frac{15}{9}$. |
| | (b) -2 ; | (e) 0; | |
| | (c) $\frac{3}{4}$; | (f) 256; | |
| 112. | (a) 2; | (d) 2; | (g) 1; 2. |
| | (b) 1; | (e) 1; | |
| | (c) 0; 3; | (f) 2; | |
| 113. | (a) 8; | (e) $-\frac{8}{3}$; | (i) 2; |
| | (b) 9; | (f) 2; | (j) -6 ; |
| | (c) 100000; | (g) 4; | (k) 12; |
| | (d) $\frac{10}{7}$; | (h) 1; | (l) $-\frac{2}{3}$; |
| | | | (m) $-\frac{4}{3}$; |
| | | | (n) $-\frac{8}{3}$; |
| | | | (o) $-\frac{7}{6}$. |
| 114. | (a) $\frac{1}{4}$; | (d) 3; | (g) $\frac{1}{25}$; |
| | (b) $\frac{1}{64}$; | (e) 64; | (h) $\frac{1}{2}$; |
| | (c) 4; | (f) 8; | (i) 3; |
| | | | (j) 8; |
| | | | (k) 2; |
| | | | (l) $\frac{5}{8}$. |
| 115. | (a) 64; | (c) 16; | (e) 3; |
| | (b) $\frac{1}{3}$; 3; | (d) 4; | (f) 27. |